

Présentation à partir d'un exemple du calcul des chaînes de cotes 3D

par Eric Ballot* et Pierre Bourdet**

* Centre de Gestion Scientifique
Ecole des Mines de Paris

** Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée
Ecole Normale Supérieure de Cachan

Les méthodes de calcul des chaînes de cotes unidirectionnelles sont aujourd'hui bien connues mais sont, par définition, inadaptées au traitement des couplages qui existent entre les défauts géométriques portés par des directions différentes.

Des travaux récents, s'appuyant sur le modèle des Δl mais utilisant le formalisme des torseurs de petits déplacements, permettent d'élargir le champ d'application des chaînes de cotes à la description tridimensionnelle des défauts des mécanismes.

La présentation sous la forme d'un exemple permettra d'introduire les principaux points de la méthode tout en montrant un résultat sur un cas concret. Le cas retenu, relativement simple pour permettre le suivi des calculs, est celui de la mise en position d'un arbre par un vé, ces deux pièces comportants des défauts géométriques.

La spécification des tolérances géométriques admissibles des pièces mécaniques et de leurs moyens d'obtention repose aujourd'hui sur un ensemble d'outils variés, chaînes de cotes unidirectionnelles, langages de spécifications normalisées, méthodes de mesure et de contrôle.

Ces moyens, relativement hétérogènes, aboutissent à des modes de description plus ou moins simplifiés de la géométrie réelle des pièces. Parmi ceux-ci les chaînes de cotes unidirectionnelles représentent certainement un point faible des outils précités.

La métrologie, notamment pour l'usage des machines à mesurer tridimensionnelles, utilise un moyen de caractérisation plus précis : les torseurs de petits déplacements. Ces torseurs proposés par l'auteur de l'article et A. Clément¹ modélisent les défauts macro-géométriques par une approximation linéaire du champs de déplacement entre la surface nominale et celle mesurée.

Dès lors, on peut se demander s'il ne serait pas intéressant d'utiliser les torseurs de petits-déplacements pour réaliser des calcul de dispersion ou de chaînes de cotes et ceci aussi bien en conception qu'en fabrication. Un système d'aide à la spécification est d'ailleurs proposé sur ce principe par A. Clément sous l'appellation de SATT (Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement).

L'approche que nous allons présenter à travers cet article, si elle s'inspire des mêmes origines diffère par le principe de calcul proposé et le type de résultats. En effet, cette méthode consiste à déterminer un modèle de calcul formel des tolérances. Ce modèle pourra ensuite être utilisé pour différents types de calculs d'analyse ou de synthèse des tolérances. Dans le cadre de cet article, nous ne nous intéresserons pas à un calcul de transfert de cotes mais à un assemblage simple, sachant que tout problème de

¹ P.Bourdet et A.Clément, *Controlling a complex surface with a 3 axis Measuring Machine*, C.I.R.P. Annals 1976 Manufacturing Technology, Volume 25/1/1976 p. 359

transfert se ramène toujours à un problème d'assemblage. De plus sa relative simplicité permettra d'expliciter les différents calculs.

1. Mise en position d'un arbre par un vé

La mise en position d'un arbre par un vé, représenté sur la figure 1, est un élément de montage d'usinage couramment utilisé. On constate néanmoins qu'il n'est pas très facile à intégrer dans une chaîne de cotes traditionnelle puisqu'il faut recourir à un calcul géométrique supplémentaire qui de plus ne tient pas compte des défauts du vé.

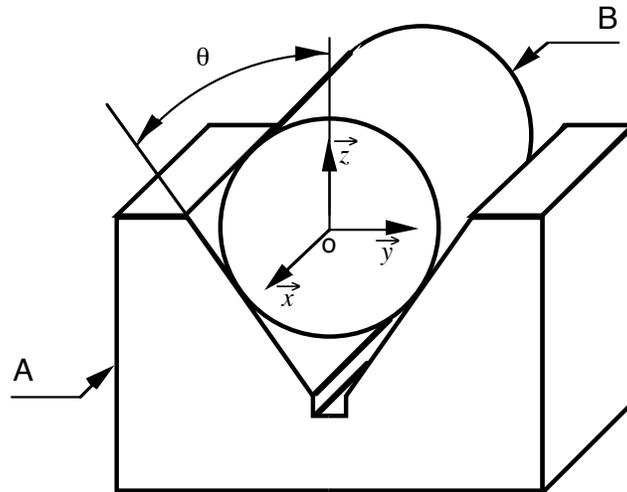


Figure 1 : montage d'un arbre sur un vé d'angle θ

1.1 Le cas classique : le vé est parfait

Un calcul géométrique simple permet, dans le cas où les défauts du vé sont négligés par rapport à la variation de rayon de l'arbre, d'exprimer la variation Δz de position de l'axe du cylindre suivant l'axe vertical de la figure 1. Ce résultat est rappelé par la formule 1. Le décalage suivant l'axe horizontal est nul, c'est-à-dire indépendant du rayon², dans ce cadre d'hypothèses.

$$\Delta z = \frac{\Delta R}{\sin(\theta)} \quad (1)$$

1.2 Un cas plus réaliste : le vé et l'arbre sont imparfaits

Les vé de mise en position, même s'ils sont souvent plus précis que les pièces, n'en recèlent pas moins des défauts. Dès lors, il devient intéressant de connaître l'impact de ces défauts sur la mise en position, ce qui demande un modèle qui les inclut. La résolution de ce problème avec la prise en compte de l'ensemble des défauts de position et d'orientation du cylindre, si elle semble possible, n'est pratiquement pas mise en oeuvre car le calcul est plus complexe. Nous traiterons donc ce problème sans passer par une démonstration géométrique particulière mais en appliquant une méthode de calcul de type chaîne de cotes tridimensionnelles.

² Cette formule se trouve dans tous manuels de fabrication mécanique.

2. Méthodologie

Le problème que nous proposons de résoudre pour illustrer les principes de notre mode de calcul répond à deux objectifs : à la fois très simple, 2 pièces ce qui permettra de vérifier la plus part des calculs, et qui apporte un résultat non trivial, pour s'en convaincre il suffirait de tenter la démonstration géométrique de la relation (18).

La méthode de calcul³ comporte trois grandes étapes et s'appuie sur un formalisme suffisamment général pour traiter des problèmes de chaînes de cotes aussi bien dans le cas de la conception que de la fabrication. Ces trois étapes sont :

- Définir formellement les paramètres des éléments du mécanisme ou du montage. Il s'agit essentiellement :
 - d'associer des *torseurs d'écart* à chaque surface des pièces,
 - de caractériser le déplacement de chaque pièce par un *torseur de petits-déplacements* et
 - de calculer la forme des *torseurs jeux* associés à chaque liaison.
- Calculer des petits déplacements de chaque pièce en fonction des écarts et des jeux. Le cas échéant, une combinatoire de mise en position peut intervenir et engendre autant de positions qu'il existe de cas retenus pour l'analyse.
- Calculer des contraintes géométriques sur les pièces en fonction des conditions fonctionnelles imposées.

Dans les parties suivantes nous développerons, sur l'exemple proposé, les trois étapes présentées succinctement ici.

3. Description du montage et des paramètres

La première étape de ce modèle est la définition des écarts géométriques des surfaces, des déplacements des pièces et des jeux. Pour ce faire nous associons des torseurs à chacun de ces éléments suivant des principes que nous allons maintenant détailler.

3.1 Les surfaces de substitution

Lorsque l'on parle d'écarts il nous faut en préciser la définition. Un torseur d'écart exprimera le déplacement qu'il faut appliquer à une surface nominale pour qu'elle coïncide avec sa surface de substitution. Cette surface de substitution de typologie identique à la surface nominale représente, du point de vue de ce modèle, la surface réelle. Les liens que l'on peut envisager entre ces deux surfaces sont multiples : ajustement par la méthode des moindres carrés, tangence extérieure, etc. Nous associerons donc un torseur de petits-déplacements à chaque surface de manière identique aux Δl mais avec un degré de précision supérieur puisqu'il est ainsi tenu compte de la position et de l'orientation dans l'espace. La figure 2 propose une représentation en parallèle des modèles utilisés en métrologie et dans le cadre des chaînes de cotes tridimensionnelles présentées.

³ P. Bourdet and E. Ballot « Geometric laws for tolerancing », 4th CIRP seminar on tolerancing, Tokyo, april 95 et « Modélisation de la géométrie des mécanismes pour le tolérancement » 4ème colloque PRIMECA, avril 95.

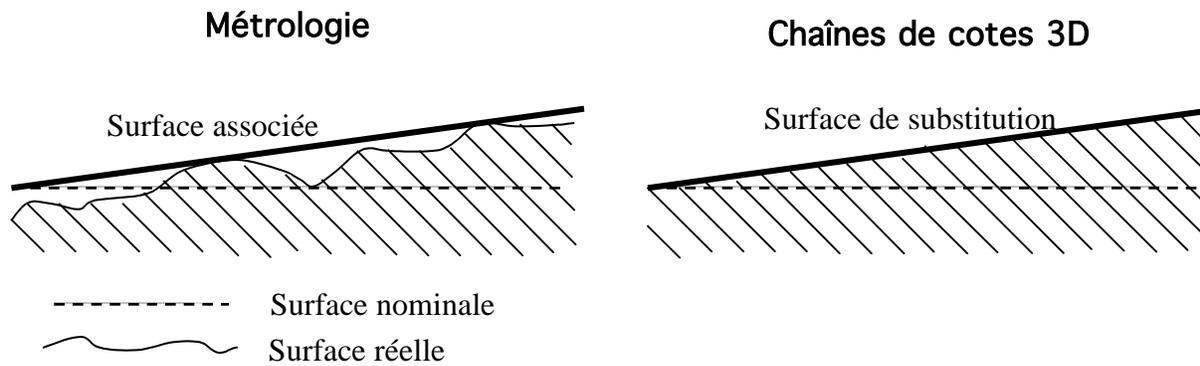


Figure 2 : modélisations de la surface réelle

Le déplacement nécessaire pour obtenir la superposition de la surface nominale avec la surface de substitution, du fait des invariances possibles par déplacement de la surface nominale, peut être réalisé par une infinité de transformations. En effet, les surfaces utilisées dans les liaisons mécaniques possèdent des propriétés d'invariance par rapport à certaines translations ou certaines rotations.

Si l'on considère un torseur de petit déplacement entre une surface théorique et sa surface de substitution associée. On a alors pour le torseur associé à ce déplacement un ensemble de composantes d'invariance que l'on qualifiera d'indéterminées. Pour illustrer cette distinction, nous considérons un plan, représenté par la figure 3, pour lequel on a représenté les composantes de déplacement indéterminées et que l'on notera $i(kl)$ où l'indice k est le type de déplacement (r ou t) et l'indice l la direction (x, y ou z).

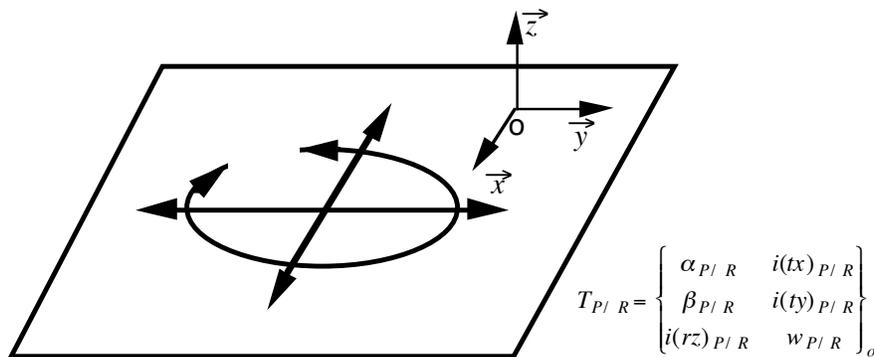


Figure 3 : composantes de déplacement indéterminées d'un plan

Ces composantes indéterminées sont généralement fixées à zéro, notamment dans les modèles d'identification de surfaces utilisés en métrologie ; elles seront par contre considérées comme des variables dans ce modèle et constitueront l'élément central pour calculer la forme des torseurs jeux et vérifier la validité des chaînes de cotes.

1.1 Paramétrage des défauts de l'arbre : torseur d'écart de l'arbre

Le torseur d'écart exprime l'écart entre la surface nominale et une surface de même nature qui modélise la surface réelle. Ce torseur d'écart est lui-même construit à partir de deux torseurs de petits-

déplacements. Le torseur de petits-déplacements de la surface et le torseur de variation des caractéristiques intrinsèques.

Le modèle tel qu'il a été développé conserve la typologie de la surface dès lors un cylindre est localisé en orientation et en position par quatre paramètres auxquels on ajoute un paramètre de variation du diamètre, figure 4.

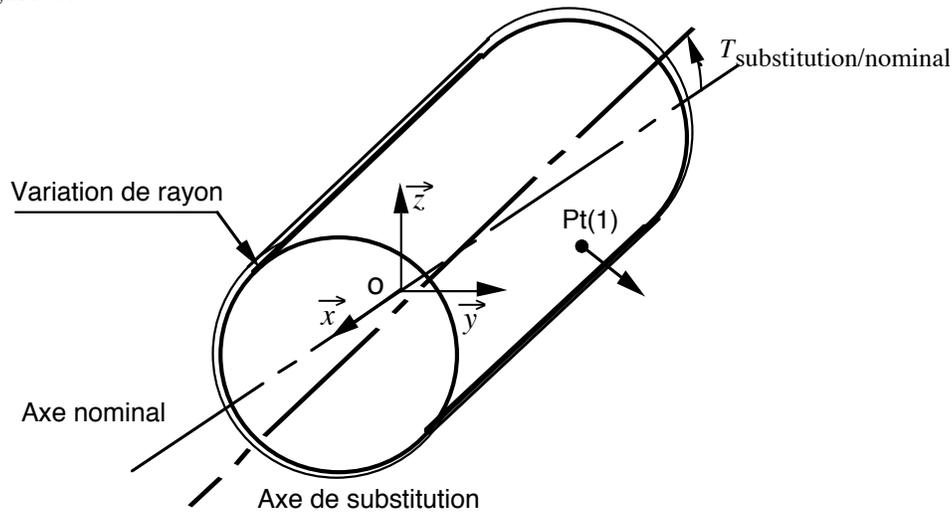


Figure 4 : paramétrage des écarts d'un cylindre

On écrit alors la relation (2) du torseur d'écart du cylindre de substitution par rapport au cylindre nominal, pour un point particulier de celui-ci, par la composition de deux torseurs dont un décrit le déplacement de l'axe et l'autre la variation de rayon en un point de paramètre φ .

$$T_{axe} = \begin{Bmatrix} i_{3/B}(rx) & i_{3/B}(tx) \\ \beta_{3/B} & v_{3/B} \\ \gamma_{3/B} & w_{3/B} \end{Bmatrix}_O ; T_{rayon} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \cos \varphi \\ 0 & R \sin \varphi \end{Bmatrix}_{Pt(1)} \quad (2)$$

$$T_{3/B} = T_{axe} + T_{rayon} = \begin{Bmatrix} i_{3/B}(rx) & i_{3/B}(tx) \\ \beta_{3/B} & v_{3/B} + R \cos \varphi \\ \gamma_{3/B} & w_{3/B} + R \sin \varphi \end{Bmatrix}_O$$

3.3 Paramétrage des défauts des deux plans du vé⁴ : torseurs d'écart des plans

Dans le cas du plan, cf. Figure 5, le torseur de petits-déplacements est identique à celui utilisé en métrologie complété des composantes indéterminées.

⁴ Pour des raisons de simplicité des calculs nous restreignons l'étude du vé aux deux plans inclinés mais rien n'empêche de compléter cette description par les autres faces du vé, notamment les faces qui positionnent le vé dans son environnement.

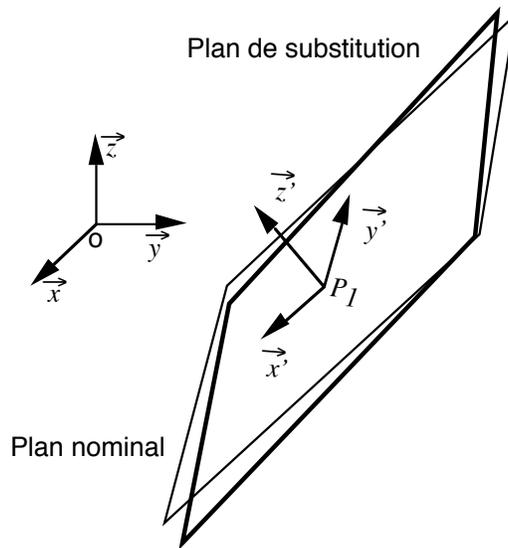


Figure 5 : paramétrage du torseur d'écart du plan 1

D'où, d'après les considérations précédentes, le torseur d'écart du plan 1 dans le repère R' (propre à la surface) (3) puis dans le repère R du montage (4).

$$T_{1/A} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1/A} & i_{1/A}(tx) \\ \beta_{1/A} & i_{1/A}(ty) \\ i_{1/A}(rz) & w_{1/A} \end{array} \right\}_{P1} \quad (3)$$

$$T_{1/A} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1/A} & i_{1/A}(tx) \\ -i_{1/A}(rz)\cos\theta + \beta_{1/A}\sin\theta & i_{1/A}(ty)\sin\theta - w_{1/A}\cos\theta \\ \beta_{1/A}\cos\theta + i_{1/A}(rz)\sin\theta & i_{1/A}(ty)\cos\theta + w_{1/A}\sin\theta \end{array} \right\}_{P1} \quad (4)$$

On définit un torseur d'écart, symétrique de celui-ci, pour le deuxième plan du vé. Ceci achève, pour notre exemple, le paramétrage des surfaces utiles au cas du positionnement par le vé.

3.4 Torseurs de petits déplacements des pièces

Chaque pièce est susceptible de se déplacer par rapport à sa position théorique, c'est-à-dire dans le cas des pièces aux cotes nominales, sous les effets conjoints des défauts de chaque pièces et des jeux dans les liaisons. La prise en compte de ces déplacements est réalisée par l'association d'un torseur de petit déplacement à six composantes inconnues à chaque solide du mécanisme ou du montage d'usinage considérés. On a donc pour les solides A et B dans un référentiel R un torseur générique qui prend la forme des expressions (5) en un point o quelconque de l'espace.

$$T_{A/R} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{A/R} & u_{A/R} \\ \beta_{A/R} & v_{A/R} \\ \gamma_{A/R} & w_{A/R} \end{array} \right\}_o \quad \text{et} \quad T_{B/R} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{B/R} & u_{B/R} \\ \beta_{B/R} & v_{B/R} \\ \gamma_{B/R} & w_{B/R} \end{array} \right\}_o \quad (5)$$

Ainsi, le petit déplacement du vé représenté par la figure 6, ne fait absolument pas, pour l'instant, référence aux défauts de la pièce ou des autres pièces, il s'applique à la forme nominale géométriquement parfaite du vé.

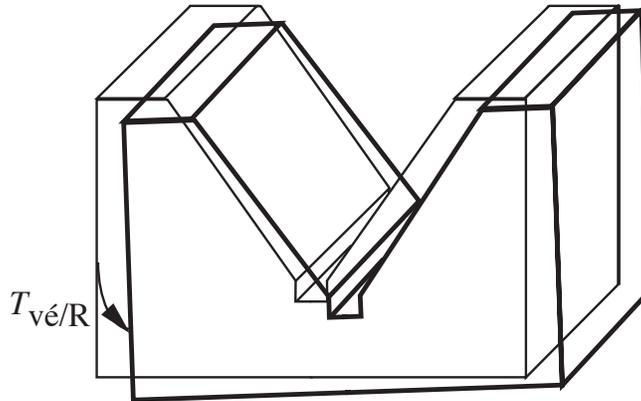


Figure 6 : déplacement du vé

Toujours dans un souci de simplification des calculs, nous considérerons ici le vé parfaitement positionné en orientation et en position par rapport au référentiel R .

La description des pièces constitutives du mécanisme est maintenant achevée. Le calcul des chaînes de causalité des écarts à travers le montage nécessite néanmoins une étape supplémentaire : le calcul de la forme des torseurs jeux.

3.5 Calcul de la forme des torseurs jeux

Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer la forme de ces torseurs que l'on associe à chaque liaison. La première consiste à réaliser une étude de cas systématique, comme cela est proposé pour les SATT de A. Clément⁵. Une seconde méthode consiste à déterminer puis utiliser un référentiel commun aux deux surfaces en contact pour utiliser une propriété des indéterminées, c'est celle que nous allons mettre en oeuvre ici. Il existe néanmoins une troisième voie, plus générale mais plus lourde à mettre en oeuvre au niveau des calculs, qui consiste à considérer chaque liaison comme un mécanisme particulier et à lui appliquer les deux premières étapes de la méthodologie proposée.

Dans l'exemple qui nous intéresse nous allons nous placer pour le calcul de la forme du torseur jeu entre les surfaces 3 de l'arbre et 1 du vé au point C1 dans le repère R' puis R défini par la figure 7.

⁵ Clément A., Desrochers A. et Rivière A. « Theory and practice of 3D tolerancing for assembly », the int. Conf. On CAD/CAM, Jerusalem, 1989.

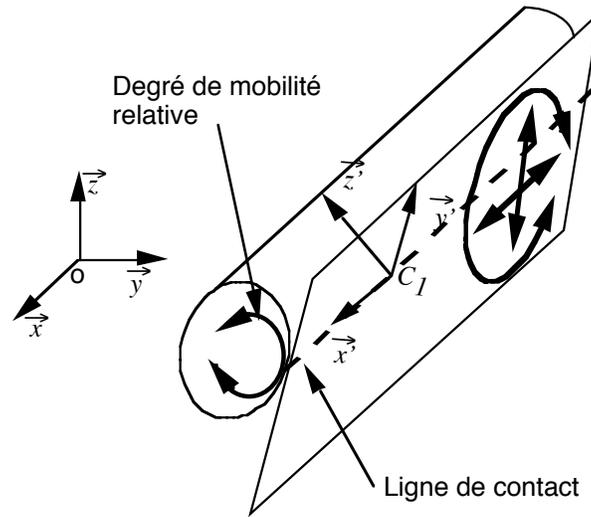


Figure 7 : liaison entre le plan 1 et l'arbre 3

On définit alors la forme du torseur jeu entre 3 et 1 par la formule (6) suivante :

$$T_{3/1} = T_{3/R} - T_{1/R} \quad (6)$$

$$T_{3/1} = \left\{ \begin{array}{cc} i(rx)_{3/R} & i(tx)_{3/R} \\ \beta_{3/R} & v_{3/R} \\ \gamma_{3/R} & w_{3/R} \end{array} \right\}_{c1} - \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1/R} & i(tx)_{1/R} \\ \beta_{1/R} & i(ty)_{1/R} \\ i(rz)_{1/R} & w_{1/R} \end{array} \right\}_{c1} = \left\{ \begin{array}{cc} i(rx)_{3/R} - \alpha_{1/R} & i(tx)_{3/R} - i(tx)_{1/R} \\ \beta_{3/R} - \beta_{1/R} & v_{3/R} - i(ty)_{1/R} \\ \gamma_{3/R} - i(rz)_{1/R} & w_{3/R} - w_{1/R} \end{array} \right\}_{c1}$$

Pour déterminer la forme du torseur jeu nous allons appliquer un changement de variables en appliquant le principe suivant : si une composante contient au moins une indétermination alors on appellera cette composante indéterminée de jeu en rotation ou translation suivant le cas, sinon il s'agit d'un jeu en rotation ou translation.

D'où, après le changement de variables, la forme du torseur jeu entre le plan 1 et le cylindre 3 au point de paramètres C1 qui s'écrit suivant (7).

$$T_{3/1} = \left\{ \begin{array}{cc} IndJ_{3/1}(rx) & IndJ_{3/1}(tx) \\ J_{3/1}(ry) & IndJ_{3/1}(ty) \\ IndJ_{3/1}(rz) & J_{3/1}(tz) \end{array} \right\}_{C1} \quad (7)$$

On a alors dans R la forme du torseur jeu entre le plan 1 et le cylindre 3 qui s'écrit suivant (8).

$$T_{3/1} = \left\{ \begin{array}{cc} IndJ_{3/1}(rx) & IndJ_{3/1}(tx) \\ J_{3/1}(ry) \cos \theta - IndJ_{3/1}(rz) \sin \theta & -J_{3/1}(tz) \sin \theta + IndJ_{3/1}(ty) \cos \theta \\ J_{3/1}(ry) \sin \theta + IndJ_{3/1}(rz) \cos \theta & J_{3/1}(tz) \cos \theta + IndJ_{3/1}(ty) \sin \theta \end{array} \right\}_{(x1, R \cos \theta, -R \sin \theta)} \quad (8)$$

La définition du torseur jeu entre 3 et 2 est réalisée au point C2 dans le repère R'' puis R de manière identique au torseur jeu précédent. On a alors :

$$T_{3/2} = \left\{ \begin{array}{cc} \text{Ind}J_{3/2}(rx) & \text{Ind}J_{3/2}(tx) \\ J_{3/2}(ry)\sin\theta + \text{Ind}J_{3/2}(rz)\cos\theta & J_{3/2}(tz)\cos\theta + \text{Ind}J_{3/2}(ty)\sin\theta \\ -J_{3/2}(ry)\cos\theta + \text{Ind}J_{3/2}(rz)\sin\theta & J_{3/2}(tz)\sin\theta - \text{Ind}J_{3/2}(ty)\cos\theta \end{array} \right\}_{(x2, -R\cos\theta, -R\sin\theta)} \quad (9)$$

Pour la suite des calculs nous considérerons l'axe de l'arbre confondu avec le déplacement de B et les indéterminées d'écart nulles. Ces simplifications permettront de simplifier les expressions sans changer la nature des résultats.

4. Calcul de la position de l'arbre

Arrivé à ce stade de la démarche, il paraît intéressant de faire un premier bilan. Que connaissons-nous et qu'allons nous déterminer ?

Nous venons de définir le paramétrage nécessaire et suffisant des écarts de chacun des éléments de notre montage pour un calcul de chaîne de cotes tridimensionnelles, nous avons donc formulé notre problème. Nous avons comme paramètres les composantes d'écarts ainsi que les composantes jeux et comme inconnues les petits-déplacements des pièces et les composantes de jeux indéterminées. Nous allons donc calculer l'expression des composantes de jeux indéterminées de manière à calculer ensuite la valeur des composantes de petits-déplacements des pièces.

Ce calcul fait lui-même appel à deux étapes. Dans un premier temps nous calculerons la position de l'arbre conséquence des défauts de chacune des liaisons considérées indépendamment, puis nous calculerons le déplacement global.

4.1 Composition des petits déplacements issus de chaque liaison

Il nous reste maintenant à mettre cette première étape en équations et à les résoudre. Les équations que nous pouvons écrire sont : les compositions de torseurs de petits déplacements relatives à chacune des liaisons. En effet, par composition des torseurs de petits déplacements on peut écrire pour toute liaison l'égalité (10) suivante :

$$T_{i/B} + T_{B/R} = T_{i/j} + T_{j/A} + T_{A/R} \quad (10)$$

Cette égalité résulte de l'expression de deux manières différentes de la position de la surface i , comme surface de la pièce B et comme surface positionnée par la liaison ij . Dans cet exemple, en isolant le Torseur de B/R , on a, issu de chacune des liaisons, une expression de $T_{B/R}$, ce qui se traduit par les deux égalités (11) et (12) dans le cas de notre exemple :

$$T_{B/R} = T_{3/1} + T_{1/A} + T_{A/R} - T_{3/B} \quad (11)$$

$$T_{B/R} = T_{3/2} + T_{2/A} + T_{A/R} - T_{3/B} \quad (12)$$

Après résolution des deux équations, on obtient deux expressions (13) et (14) de $T_{B/R}$, que l'on note $T_{B/R}^{(1)}$ pour la première équation et $T_{B/R}^{(2)}$ pour la deuxième.

$$T_{B/R}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{1/A} + \text{Ind}J_{3/1}(rx) & \text{Ind}J_{3/1}(tx) \\ -\text{Ind}J_{3/1}(rz)\cos\theta + (\beta_{1/A} + J_{3/1}(ry))\sin\theta & (-\Delta R + x1\beta_{1/A} - J_{3/1}(tz) - w_{1/A})\cos\theta + \text{Ind}J_{3/1}(ty)\sin\theta \\ \text{Ind}J_{3/1}(rz)\sin\theta + (\beta_{1/A} + J_{3/1}(ry))\cos\theta & (\Delta R - x1\beta_{1/A} + J_{3/1}(tz) + w_{1/A})\sin\theta + \text{Ind}J_{3/1}(ty)\cos\theta \end{array} \right\}_{CI} \quad (13)$$

$$T_{B/R}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{2/A} + \text{Ind}J_{3/2}(rx) \qquad \qquad \qquad \text{Ind}J_{3/2}(tx) \\ \text{Ind}J_{3/2}(rz)\cos\theta + (\beta_{2/A} + J_{3/2}(ry))\sin\theta \quad (\Delta R - x2\beta_{2/A} + J_{3/2}(tz) + w_{2/A})\cos\theta + \text{Ind}J_{3/2}(ty)\sin\theta \\ \text{Ind}J_{3/2}(rz)\sin\theta - (\beta_{2/A} + J_{3/2}(ry))\cos\theta \quad (\Delta R - x2\beta_{2/A} + J_{3/2}(tz) + w_{2/A})\sin\theta - \text{Ind}J_{3/2}(ty)\cos\theta \end{array} \right\}_{C_2} \quad (14)$$

Nous venons d'identifier deux expressions partielles, car issue chacune d'une seule liaison, du déplacement de l'arbre en fonction des défauts de chaque liaison et par rapport au référentiel du vé. Il nous faut donc les unifier et chercher, le cas échéant, les conditions de leur compatibilité.

4.2 Expression du petit déplacement de l'arbre

Les expressions (13) et (14) définissent de deux manières différentes le déplacement de l'arbre. Or ces deux définitions du déplacement sont identiques puisqu'il s'agit du déplacement de la même pièce. On définit donc le déplacement de l'arbre B par la relation (15).

$$T_{B/R}^* \equiv T_{B/R}^{(1)} = T_{B/R}^{(2)} \quad (15)$$

Dans la mise en position globale de la pièce, chaque liaison apporte son concours. On cherche donc pour chaque liaison les indéterminées de liaisons qui pourraient être calculées à partir des composantes des autres. L'égalité (15) des deux torseurs qui définit le déplacement de l'arbre, se ramène alors à un ensemble de 6 équations linéaires où les inconnues sont les indéterminées de jeux. Ce système peut donc se mettre sous une forme matricielle (16), que nous noterons de la manière suivante :

$$C \cdot I = D \quad (16)$$

La dimension de ce système, explicité par la relation (17), est de 6 équations pour 8 inconnues. Sa résolution partielle ou totale est réalisée par la méthode du pivot partiel de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\theta & 0 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \sin\theta & 0 & x2\sin\theta & R\sin\theta & -x1\sin\theta & -R\sin\theta \\ \cos\theta & 0 & \cos\theta & 0 & -x2\cos\theta & -R\cos\theta & -x1\cos\theta & -R\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Ind}J_{3/2}(ty) \\ \text{Ind}J_{3/2}(tx) \\ \text{Ind}J_{3/1}(ty) \\ \text{Ind}J_{3/1}(tx) \\ \text{Ind}J_{3/2}(rz) \\ \text{Ind}J_{3/2}(rx) \\ \text{Ind}J_{3/1}(rz) \\ \text{Ind}J_{3/1}(rx) \end{bmatrix} = D \quad \text{et(17)}$$

$$D = \begin{bmatrix} -\alpha_{1/A} + \alpha_{2/A} \\ (-\beta_{1/A} + \beta_{2/A} - J_{3/1}(ry) + J_{3/2}(ry))\sin\theta \\ -(\beta_{1/A} + \beta_{2/A} + J_{3/1}(ry) + J_{3/2}(ry))\cos\theta \\ R(-\beta_{1/A} + \beta_{2/A} - J_{3/1}(ry) + J_{3/2}(ry)) \\ R(\alpha_{1/A} - \alpha_{2/A})\sin\theta + (2\Delta R + x1J_{3/1}(ry) + x2J_{3/2}(ry) + J_{3/1}(tz) + J_{3/2}(tz) + w_{1/A} + w_{2/A})\cos\theta \\ (-x1J_{3/1}(ry) + x2J_{3/2}(ry) - J_{3/1}(tz) + J_{3/2}(tz) - w_{1/A} + w_{2/A})\sin\theta + R(\alpha_{1/A} + \alpha_{2/A})\cos\theta \end{bmatrix}$$

Après résolution de ce système, on obtient l'expression des indéterminées de jeux en fonction soit :

- des défauts et des jeux d'autres liaisons, ce qui signifie que le degré de mobilité est supprimé par les autres liaisons.

- des défauts, des jeux d'autres liaisons et d'autres indéterminées, ce qui signifie que le degré de mobilité subsiste.

Le système (17), peut très bien dans le cas général, être simultanément, sous contrainte, il n'y a pas suffisamment d'équations pour calculer toutes les indéterminées, et sur contrainte, il existe des conditions de compatibilité. De manière plus concrète, cela signifie qu'il peut subsister des degrés de mobilité dans le montage mais aussi des conditions de montage liées à l'hyperstatisme⁶. Dans le cas de notre exemple, le système (17) admet une solution sans condition de compatibilité ce qui signifie qu'il ne recèle pas de degré d'hyperstatisme, y compris local.

Après substitution des composantes indéterminées du torseur de petits déplacements (13) par leur expression issue de la résolution de (17), on obtient le petit déplacement consécutif à l'écart de l'axe de l'arbre en un point quelconque de l'espace (ici l'origine). De plus, dans cet exemple, on assigne aux jeux la valeur zéro car il y a un contact entre l'arbre et le vé. En revanche la méthode et les relations qui en découlent se vérifient quelque soit la valeur des jeux non contraints.

$$T_{B/R}^* = \left\{ \begin{array}{cc} \text{Ind}J_{3/1}(rx) & \text{Ind}J_{3/1}(tx) \\ \frac{\beta_{1/A} + \beta_{2/A}}{2 \sin \theta} & \frac{-w_{1/A} + w_{2/A}}{2 \cos \theta} \\ \frac{\beta_{1/A} - \beta_{2/A}}{2 \cos \theta} & \frac{\Delta R}{\sin \theta} + \frac{w_{1/A} + w_{2/A}}{2 \sin \theta} \end{array} \right\}_O \quad (18)$$

Ce petit déplacement (18) de l'axe de l'arbre amène deux remarques. Tout d'abord, il subsiste deux composantes indéterminées donc deux degrés de mobilité dans ce montage, ensuite on remarquera qu'en supposant les défauts, autres que le rayon, sont nuls ; on obtient un résultat équivalent à la relation (1).

4.3 Exploitation des résultats

Le calcul du petit déplacement de l'axe permet d'obtenir par composition de torseurs d'autres type d'information. Par exemple, le petit déplacement d'un point quelconque de l'arbre paramétré par (x, ϕ) est :

$$T_{B/R}^* + T_{3/B} = \left\{ \begin{array}{cc} \text{Ind}J_{3/1}(rx) & \text{Ind}J_{3/1}(tx) + \dots \\ \frac{\beta_{1/A} + \beta_{2/A}}{2 \sin \theta} & \frac{-w_{1/A} + w_{2/A}}{2 \cos \theta} - (\Delta R + R \cdot \text{Ind}J_{3/1}(rx)) \sin \phi + x \frac{\beta_{1/A} - \beta_{2/A}}{2 \cos \theta} \\ \frac{\beta_{1/A} - \beta_{2/A}}{2 \cos \theta} & \frac{\Delta R}{\sin \theta} + \frac{w_{1/A} + w_{2/A}}{2 \sin \theta} + (\Delta R + R \cdot \text{Ind}J_{3/1}(rx)) \cos \phi - x \frac{\beta_{1/A} + \beta_{2/A}}{2 \sin \theta} \end{array} \right\}_c \quad (19)$$

Ce petit déplacement se projette suivant une direction particulière, par exemple la normale à l'arbre, en effectuant son comoment avec les coordonnées pluckérienne de la normale à l'arbre au point d'expression. On peut alors procéder à diverses vérifications, comme le calcul de la déviation de l'arbre au niveau des lignes de contact avec le vé. On constate alors que l'on obtient la position des plans de substitution, ce qui signifie qu'il y a contact en ces points.

⁶ Nous ne rentrerons pas dans les détails des relations qui existent entre la théorie des mécanismes et cette formulation dans le cadre de cet article mais un lecteur intéressé pourra faire le rapprochement.

Une condition fonctionnelle s'exprime alors à partir des petits déplacements des pièces, fonction des défauts des surfaces de contact, et des surfaces entre lesquelles elle est exprimée. Pour une condition entre deux surfaces i , de la pièce A, et j , de la pièce B, on a suivant la direction n des coordonnées pluckériennes de la normale choisie et le domaine ∂ des surfaces où s'applique cette condition. On calcule la loi de comportement géométrique par le comoment suivant :

$$cf_{ij}(n, \partial) = \left\{ P_{n, \partial} \right\} \cdot \left\{ T_{i/A} + T_{A/R}^* - T_{j/B} - T_{B/R}^* \right\} \quad (20)$$

La formulation des chaînes de cotes devient ainsi automatique⁷.

A titre d'illustration de l'utilisation de cette méthode, nous allons aborder, à partir du résultat de ces calculs, la question de la coaxialité entre l'axe théorique de l'arbre et celui de substitution. On choisit alors deux critères : l'angle du vé et l'importance relative des défauts de l'arbre et du vé.

On définit pour mesurer l'écart entre l'axe nominal et l'axe de substitution la distance suivante :

$$d = \sqrt{(v_{B/R}^*)^2 + (w_{B/R}^*)^2} \quad (21)$$

A partir du petit déplacement de l'axe défini par le torseur (18), on a dans le plan de l'origine :

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{-w_{1/A} + w_{2/A}}{\cos \theta} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta R + w_{1/A} + w_{2/A}}{\sin \theta} \right)^2} \quad (22)$$

On peut ainsi pour des niveaux de dispersion fixés à la fois sur le vé et l'arbre chercher à minimiser l'expression (22) en fonction de l'angle ce qui conduit à définir le vé le plus adapté ainsi que la sensibilité de la localisation par rapport à l'angle. Le résultat de l'étude de cette fonction est récapitulée par la figure 8, où R désigne le niveau de défaut du cylindre par rapport à un vé avec des tolérances de 0,01mm.

⁷ E. Ballot « lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement », thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, avril 95.

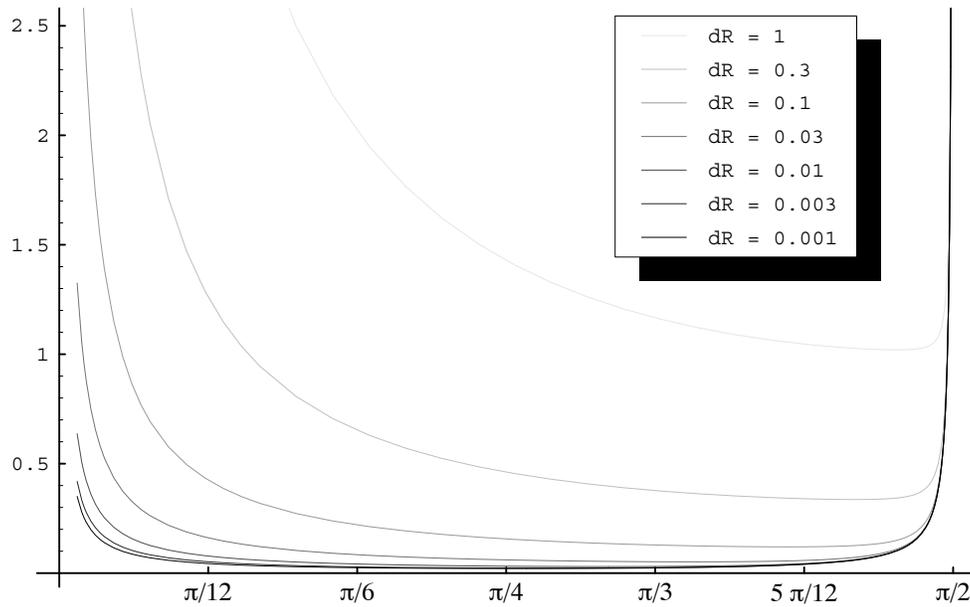


Figure 8 : position de l'axe de l'arbre fonction de l'angle du vé

On constate alors que l'angle optimal varie entre 45° pour un cylindre très précis par rapport au vé à 80° quand le cylindre admet des variations de diamètre très importantes. Enfin, on peut noter que la sensibilité relative de la dispersion autour de l'optimum qui augmente avec le rapport R.

5. Conclusion

Cet exemple, à la porté volontairement limité pour des raisons de simplicité, nous a permis d'illustrer sur un cas concret de fabrication une méthode de calcul tridimensionnelle des dispersions géométriques dans les assemblages. Si les calculs peuvent paraître compliqués pour traiter le problème de l'exemple, ils sont à mettre en regard avec le plus grand niveau de précision obtenu et le caractère systématique de la démarche qui permet leur automatisation par un programme informatique. Une maquette d'un tel programme, réalisée avec Mathematica⁸ a été largement utilisée pour traiter cet exemple, ce qui permet d'obtenir les résultats très rapidement.

On peut souligner en outre le caractère général de la formulation qui ne limite pas son application à l'étude des montages d'usinage. En effet, on peut mettre en oeuvre ces principes pour l'étude de tout type d'assemblage et en particulier pour la conception des mécanismes et de leur fabrication. Des essais dans le domaine du calcul des chaînes de cotes ont déjà eu lieu sur des produits industriels. D'une manière plus général, on peut espérer que l'apparition de méthodes formalisées permettra de mieux connaître les phénomènes en jeux et ainsi aidera à appréhender ce qui fait la qualité géométrique des pièces mécaniques.

⁸ Mathematica est un logiciel de calcul formel réalisé par Wolfram Research.