Définition et propriétés du torseur de petit déplacement

Le concept de torseur de petit déplacement (SDT) a été développé dans les années soixante-dix par Pierre Bourdet et André Clément. Il permet de définir en tout point M d'un corps rigide un petit déplacement [1], [2], [3].

Les déplacements d'un solide peuvent être caractérisés en un point O par un vecteur Translation $\overrightarrow{D_O}$ et une matrice de rotation $\overline{\overline{R}}$. Cette rotation peut être exprimée par trois angles (α, β, γ) représentant les rotations successives autour des trois axes d'un système d'axes (O; $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) lié au solide. La translation d'un point M due aux trois rotations (α, β, γ) caractérisée par les trois matrices de rotation $\overline{\overline{R_1}}$, $\overline{\overline{R_2}}$, $\overline{\overline{R_3}}$ s'exprime par la formule :

$\overrightarrow{MM'} = \overline{\overline{R'}} \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}$ avec $\overline{\overline{R'}} = \overline{\overline{R_3}} \cdot \overline{\overline{R_2}} \cdot \overline{\overline{R_1}}$

La matrice $\overline{\overline{R'}}$ est de la forme :

$$\begin{vmatrix} \cos\gamma.\cos\beta & -\sin\gamma.\cos\beta & \sin\beta \\ \sin\gamma.\cos\alpha + \cos\gamma.\sin\beta.\sin\alpha & \cos\gamma.\cos\alpha - \sin\gamma.\sin\beta.\sin\alpha & -\cos\beta.\sin\alpha \\ \sin\gamma.\sin\alpha - \cos\gamma.\sin\beta.\cos\alpha & \cos\gamma.\sin\alpha + \sin\gamma.\sin\beta.\cos\alpha & \cos\beta.\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Dans le cas de petites rotations, un développement limité d'ordre un des fonctions angulaires permet d'écrire la matrice $\overline{\overline{R'}}$ sous la forme :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

En posant $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{R'}} - \overline{\overline{1}}$, la translation $\overrightarrow{D_M}$ d'un point M quelconque du solide, due aux trois petites rotations (α, β, γ) et à la petite translation au point O, $\overrightarrow{D_O}$ s'exprime par la formule :

$$\overrightarrow{D_M} = \overrightarrow{D_O} + (\overline{\overline{R'}} - \overline{\overline{1}}) \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{D_M} = \overrightarrow{D_O} + \overline{\overline{R}} \cdot \overrightarrow{OM}$$

Soit

$$\overrightarrow{D_M} = \overrightarrow{D_O} + \begin{vmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{OM}$$

Que l'on peut écrire sous la forme vectorielle : $\overrightarrow{D_M} = \overrightarrow{D_O} + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}$

Avec $\overrightarrow{D_o}$ (u, v, w) vecteur de translation du solide au point O, et $\vec{\Omega}$ (α, β, γ) vecteur de rotation du solide

Le couple de vecteurs : $\left\{\overrightarrow{D_o}, \vec{\Omega}\right\}$ constitue un torseur que l'on appelle torseur de petit déplacement. Le déplacement $\overrightarrow{D_M}$ de tout point M d'un solide sera déduit du déplacement au point O par la formule fondamentale $\overrightarrow{D_M} = \overrightarrow{D_O} + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}$, la rotation $\vec{\Omega}$ étant un invariant du mouvement d'un solide.

Références

[1] Bourdet P. and Clément A., *Controlling a complex surface with a 3 axis Measuring Machine,* 1976, Annals of the CIRP, Vol. 25, pp. 359-364.

[2] Bourdet P. and Clément A. (1988) A study of optimal-criteria identification based on the small-displacement screw model. Annals of the CIRP, Vol. 37, pp. 503-506.

[3] Bourdet P., Mathieu L., Lartigue C., Ballu A., 1995, *The concept of the small displacement torsor in metrology,* In Proceedings of the International Euroconference on Advanced Mathematical Tools in Metrology