

Chaînes de Cotes Unidirectionnelles

(Modèle et Mode opératoire)

Pierre BOURDET (novembre 2003)

=====

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN
61 avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX

CHAINES DE COTES UNIDIRECTIONNELLES

Ce polycopié est relatif au cours de l'option "Science de la production" de la maîtrise de technologie mécanique de Paris VI. Il s'adresse à des étudiants n'ayant aucun pré-requis en cotation. Il a pour but d'apporter les connaissances minimales pour comprendre la problématique, proposer un modèle de cotation unidirectionnel et apporter une méthodologie permettant la synthèse, l'analyse et l'identification des chaînes de cotes, (6h de cours et 6h de TD).

	page
CHAP. 1 : Cotes unidirectionnelles définitions et modèles	
11 Modélisation de la géométrie réelle des pièces.....	1
12 Définitions.....	2
13 Opérations sur les cotes réelles.....	2
14 Image d'une cote réelle.....	4
15 Opérations sur les images des cotes réelles	6
CHAP. 2 : Exemple de chaîne de cotes fonctionnelles	
21 Modélisation des fonctions d'un mécanisme :	9
22 Réalisation des conditions fonctionnelles.....	10
CHAP. 3 : Chaîne de cotes de fabrication (Modèle des Δl)	
31 Modélisation géométrique des moyens de production.....	15
32 Intervalle de tolérance Δl_i	16
321 Identification des dispersions aléatoires et systématiques.....	16
CHAP. 4 : Chaîne de cotes de fabrication (Mode opératoire)	
41 Graphe de fabrication.....	21
42 Répartition optimale des tolérances.....	23
43 Choix des Cotes fabriquées	25
44 Cotes fabriquées statistiques : définitions.....	28

Chap 1 : Cotes unidirectionnelles (Définitions et modèles)

=====

1.1 MODELISATION DE LA GEOMETRIE REELLE DES PIECES

Une pièce est ici observée suivant les directions principales de sa géométrie, les directions correspondent en général aux différentes vues et coupes du dessin de définition. A une pièce sera associée (suivant les besoins) un ensemble de directions, chaque direction est ensuite traitée indépendamment des autres directions.

Une direction est définie par une droite de projection sur laquelle chaque surface, ligne ou point est représenté par un point.

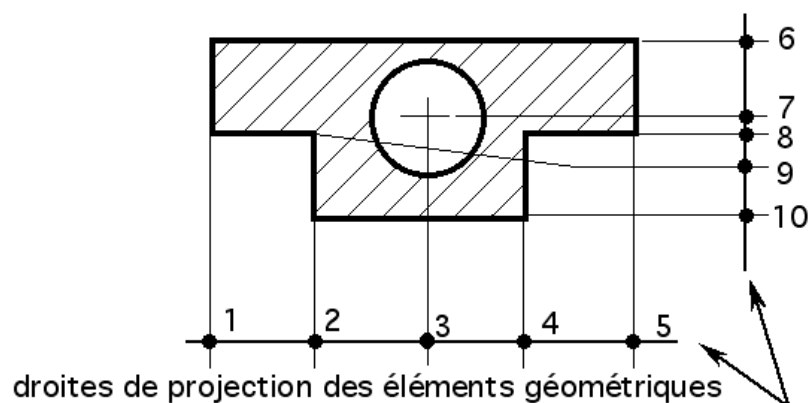
Le point est représentatif de la géométrie réelle de la pièce, sa construction est obtenue par des hypothèses propres à chaque cas de figure. A titre d'exemple, on peut citer quelques constructions les plus courantes :

- cas d'une surface plane : la surface réelle est dans un premier temps modélisée par un ensemble de points appartenant tous à un plan parfait perpendiculaire à la droite de projection, dans ce cas tous les points de la surface se projettent en un point unique représentatif de la surface.

- autre cas d'une surface plane : la surface réelle est dans un premier temps modélisée par un ensemble de points appartenant à la surface réelle. Le point représentatif de la surface correspond au point le plus à gauche (ou le plus à droite) projeté orthogonalement sur la droite de projection.

- cas d'une surface cylindrique, la surface réelle est modélisée par un cylindre parfait d'axe perpendiculaire à la droite de projection. Le point représentatif de la surface réelle sera dans ce cas la projection orthogonale d'un point de l'axe sur la droite d'observation.

On peut remarquer que toutes ces "hypothèses de construction" permettent d'apporter un sens physique au point représentatif de la surface.



Les surfaces et les lignes sont modélisées par des points. Les définitions proposées dans ce chapitre (§1.2), des termes dimension, cote réelle et cote, sont liées à des bi-points. Bien que leur écriture soit conforme à l'ISO 406, ils servent à proposer un modèle de simulation unidirectionnelle d'un assemblage de pièces ou d'un process de fabrication. Ce ne sont pas des tolérances dimensionnelles (linéaires ou angulaires) de la norme GPS-ISO 8015 qui limitent uniquement des dimensions locales réelles (voir cours sur le tolérancement).

1.2. DEFINITIONS

1.2.1 Définitions d'une dimension : $d_{i,j}^k$

A toute mesure, dans un système d'unité, on fait correspondre un élément de l'ensemble des nombres réels R . Cette mesure est faite sur une pièce ou un assemblage de pièces désigné par l'exposant k , entre deux points i et j définis géométriquement sur une droite. Une dimension répond donc à la définition mathématique du bipoint.

Une dimension $d_{i,j}^k$ c'est :

- une grandeur mesurée représentée par une valeur (élément de R) noté $g_{i,j}$
- une position géométrique notée par les indices i,j correspondant aux indices i et j des deux points considérés.
- une pièce ou un assemblage désigné par l'exposant k

$$C_{i,j}^* : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots \dots d_{i,j}^n)$$

1.2.2. Définitions d'une cote réelle $C_{i,j}^*$:

Une cote réelle $C_{i,j}^*$ est une suite **ordonnée** d'un nombre **fini** de dimensions.

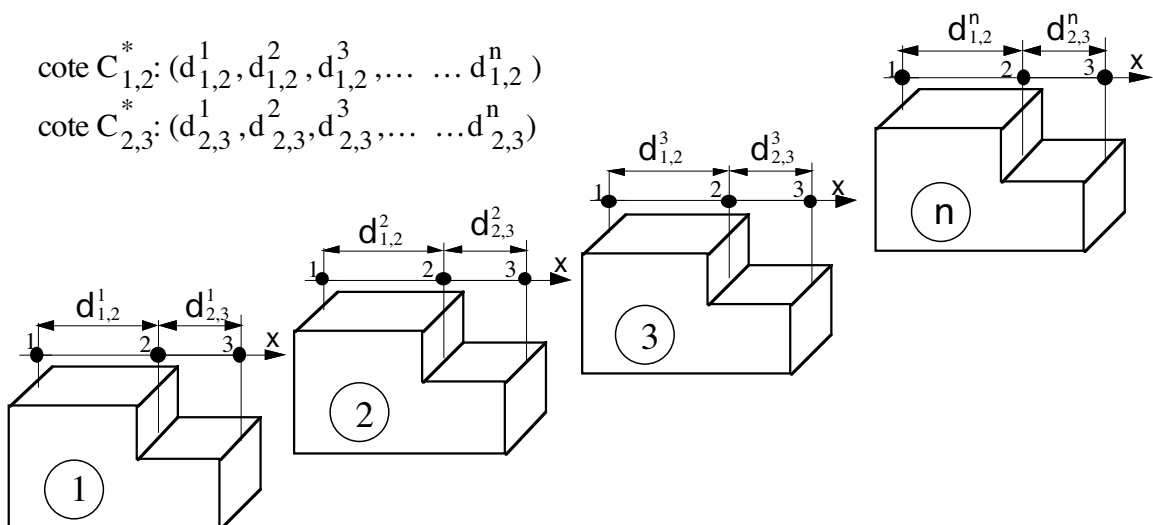
i,j est l'indice définissant la position géométrique de la cote réelle.

$$C_{i,j}^* : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots \dots, \dots, d_{i,j}^P)$$

Exemples de cotes réelles :

$$\text{cote } C_{1,2}^* : (d_{1,2}^1, d_{1,2}^2, d_{1,2}^3, \dots \dots d_{1,2}^n)$$

$$\text{cote } C_{2,3}^* : (d_{2,3}^1, d_{2,3}^2, d_{2,3}^3, \dots \dots d_{2,3}^n)$$



1.3. OPERATIONS SUR LES COTES REELLES

1.3.1 Somme de cotes réelles

Soient p cotes réelles sur n pièces ou assemblages formant une chaîne fermée de p cotes réelles :

$$\text{Cote } C_{1,2}^* : (d_{1,2}^1, d_{1,2}^2, d_{1,2}^3, \dots, d_{1,2}^k, \dots, d_{1,2}^p)$$

$$\text{Cote } C_{2,3}^* : (d_{2,3}^1, d_{2,3}^2, d_{2,3}^3, \dots, d_{2,3}^k, \dots, d_{2,3}^p)$$

$$\text{Cote } C_{i,j}^* : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots, d_{i,j}^k, \dots, d_{i,j}^p)$$

$$\text{Cote } C_{n,1}^* : (d_{n,1}^1, d_{n,1}^2, d_{n,1}^3, \dots, d_{n,1}^k, \dots, d_{n,1}^p)$$

Toute dimension $d_{i,j}^k$ d'une cote réelle $C_{i,j}^*$ appartenant à une pièce ou à un assemblage k, peut être déduite par la "somme sur les bipoints" des dimensions de la chaîne fermée de cotes appartenant à la même pièce ou au même assemblage k. En effet sur chaque pièce ou assemblage k, il est toujours possible de calculer une dimension à partir des autres dimensions de la chaîne fermée de dimensions (opération sur des bipoints).

Exemple : avec une chaîne fermée de 3 cotes $C_{1,2}^*$, $C_{2,3}^*$, $C_{3,1}^*$. Sur la k^{ème} pièce, la valeur $g_{i,j}$ de l'une des trois dimensions $d_{1,2}^k$, $d_{2,3}^k$, et $d_{3,1}^k$ peut-être déduite des valeurs des deux autres dimensions.

$$g_{1,3} = g_{1,2} + g_{2,3}$$

$$g_{1,2} = g_{1,3} - g_{2,3}$$

$$g_{2,3} = g_{1,3} - g_{1,2}$$

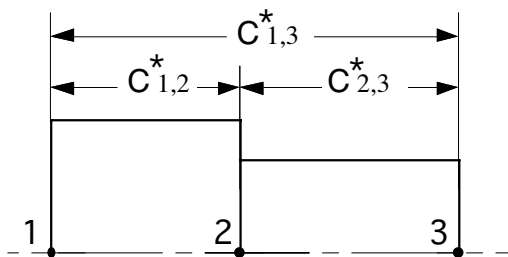
On peut donc écrire sur une pièce ou un assemblage trois relations : entre les dimensions

$$d_{1,3}^k = d_{1,2}^k \oplus d_{2,3}^k$$

$$d_{1,2}^k = d_{1,3}^k \oplus d_{3,2}^k$$

$$d_{2,3}^k = d_{2,1}^k \oplus d_{1,3}^k$$

et sur l'ensemble des pièces ou assemblage trois relations entre les cotes réelles



$$C_{1,3}^* = C_{1,2}^* \oplus C_{2,3}^*$$

$$C_{1,2}^* = C_{1,3}^* \oplus C_{3,2}^*$$

$$C_{2,3}^* = C_{2,1}^* \oplus C_{1,3}^*$$

où le symbole $\oplus$ représente la somme de deux cotes réelles ou de deux dimensions

Conséquence :

- La somme de deux cotes identiques $C_{ij}^* \oplus C_{ij}^* = \Phi$ donne un ensemble vide. En effet chaque somme des dimensions ordonnées donne une union moins l'intersection vide.
 $C_{ij}^* \oplus C_{ij}^* : (d_{ij}^1 \oplus d_{ij}^1, d_{ij}^2 \oplus d_{ij}^2, \dots, d_{ij}^n \oplus d_{ij}^n)$
- $C_{ij}^* = C_{ij}^*$ n'a un sens que si les deux cotes ont les mêmes indices i et j

1.3.2 Inclusion d'une dimension ou d'une cote réelle :

Inclusion d'une dimension $d_{i,j}^k$ ou d'une cote réelle $C_{i,j}^{*l}$ dans une cote réelle $C_{i,j}^*$:

- $d_{i,j}^k \subset C_{i,j}^*$

La dimension $d_{i,j}^k$ sera incluse dans la cote réelle $C_{i,j}^* : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots, d_{i,j}^p)$ si $d_{i,j}^k$ a sa valeur $g_{i,j}^k$ comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par les dimensions de la cote $C_{i,j}^* : g_{i,j}^l \min i \leq g_{i,j}^k \leq g_{i,j}^m \max i$.

- $C_{i,j}^{*l} \subset C_{i,j}^*$

Une cote $C_{i,j}^{*l}$ sera incluse dans une cote $C_{i,j}^*$ si toutes les dimensions de la cote $C_{i,j}^{*l}$ sont incluses dans la cote $C_{i,j}^*$.

1.4. IMAGES D'UNE COTE REELLE

L'image d'une cote réelle est un représentant résultant d'une des applications définies ci-dessous :

Exemples d'images de cotes réelles les plus utilisées :

1.4.1 L'image de la cote réelle est donnée par la plus grande des dimensions $d_{i,j}^k$ que l'on appelle cote maxi notée $C_{i,j} \max i$

1.4.2 L'image de la cote réelle est donnée par la plus petite des dimensions $d_{i,j}^k$ que l'on appelle cote mini notée $C_{i,j} \min i$

1.4.3 L'image de la cote réelle est donnée par une combinaison judicieuse de cote maxi, cote mini, cote moyenne et intervalle de tolérance.

Avec les relations suivantes :

cote moyenne: $C_{i,j} \text{ moyen} = (C_{i,j} \max i + C_{i,j} \min i)/2$

Intervalle de tolérance $IT_{i,j} = C_{i,j} \max i - C_{i,j} \min i$

cote maxi : $C_{i,j} \max i = C_{i,j} \text{ moyen} + IT_{i,j}/2$

cote mini : $C_{i,j} \min i = C_{i,j} \text{ moyen} - IT_{i,j}/2$

Exemples de notation:

$$C_{i,j} \min i^{+IT_{i,j}/2} ; C_{i,j} \text{moyen}^{+IT_{i,j}/2} ; C_{i,j} \max i^{-IT_{i,j}/2}$$

1.4.4 L'image de la cote réelle est donnée par une cote nominale associée à un écart maxi et un écart mini

$$C_{i,j}^{nominale} \begin{matrix} e_{max} \\ e_{min} \end{matrix}$$

1.4.5 L'image de la cote réelle est donnée par une définition statistique :

- dimension moyenne notée cote statistique moyenne $\overline{C_{i,j}^*}$ et l'écart type $\sigma_{i,j}$ de la variation des n^* dimensions :

$$\overline{C_{i,j}^*} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} d_{i,j}^k}{n^*} \quad \sigma_{i,j} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} (d_{i,j}^k - \overline{C_{i,j}^*})^2}{n^*}}$$

- le plus souvent la cote moyenne $\overline{C_{i,j}^*}$ et l'écart type $\sigma_{i,j}$ sont estimés à partir d'un échantillon de n dimensions.
- Le tableau ci-dessous donne, à partir de la moyenne et de l'écart type d'un échantillon, l'estimation de la moyenne et de l'écart type de la population. Le coefficient t_α dans le cas d'une loi Normale vaut :

3 pour un risque α de 2,8% d'être en dehors de l'intervalle de confiance

2 pour un risque α de 11% d'être en dehors de l'intervalle de confiance

1 pour un risque α de 44,4% d'être en dehors de l'intervalle de confiance

Soit un échantillon de n dimensions $d_{i,j}$		
La moyenne de l'échantillon est: $\overline{C_{i,j}} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} d_{i,j}^k}{n}$		L'écart type de l'échantillon est: $\sigma_{i,j} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} (d_{i,j}^k - \overline{C_{i,j}})^2}{n}}$
La moyenne estimée de la population est : $\overline{C_{i,j}} = \overline{C_{i,j}}$	L'écart type s des moyennes estimées est : $s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Intervalle de confiance de la moyenne estimée [*] $\overline{C_{i,j}} \pm t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
L'écart type σ estimé de la population est : $\sigma = \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}}$	L'écart type des écarts types estimés est : $\sigma(\sigma') = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$	Intervalle de confiance de l'écart type estimée [*] $\sigma \pm t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$
[*] quelque soit la distribution de la population l'ensemble des moyennes et l'ensemble des écart-types suivent une loi normale (ou de Laplace - Gauss) donnée sous forme de tables en fin de poly.		

La cote estimée pour un risque α est : $C_{ij} = \overline{C_{ij}} \pm k_\alpha \cdot s$ avec k_α défini par la loi de distribution de la population.

1.5. OPERATION SUR LES IMAGES DES COTES

1.5.1 Somme de cotes

Soient n cotes réelles $C_{1,2}^* \dots C_{n,1}^*$ formant une chaîne fermée de cotes :

$$\text{Cote } C_{1,2}^* : (d_{1,2}^1, d_{1,2}^2 \text{ mini}, d_{1,2}^3, \dots, d_{1,2}^6 \text{ maxi}, \dots, d_{1,2}^k)$$

$$\text{Cote } C_{2,3}^* : (d_{2,3}^1, d_{2,3}^2, d_{2,3}^3 \text{ maxi}, \dots, d_{2,3}^{k-1} \text{ mini}, d_{2,3}^k)$$

$$\text{Cote } C_{i,j}^* : (d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, d_{i,j}^3, \dots, d_{i,j}^5 \text{ maxi}, \dots, d_{i,j}^{k-1} \text{ mini}, d_{i,j}^k)$$

$$\text{Cote } C_{n,1}^* : (d_{n,1}^1 \text{ maxi}, d_{n,1}^2, d_{n,1}^3, \dots, d_{n,1}^8 \text{ mini}, \dots, d_{n,1}^k)$$

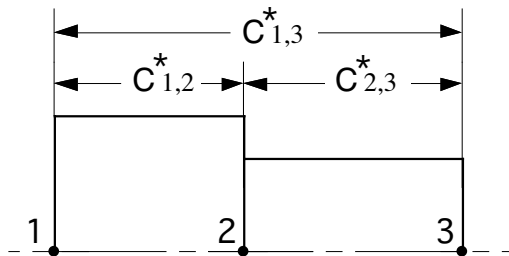
Prenons le cas où l'image de chaque cote est définie par ses cotes maxi et mini, (le raisonnement reste le même dans les cas d'images de cotes exprimées par intervalles de tolérances, cotes moyennes, cotes nominales, écarts maxi, écarts mini etc....)

L'image $C_{i,j}$ d'une cote de la chaîne ne pourra être exprimée en fonction des images des autres cotes de la chaîne que s'il existe une probabilité suffisante, pour que sur une pièce (ou un assemblage), les cotes maxi et mini se combinent judicieusement pour donner la cote maxi et la cote mini de la cote $C_{i,j}$.

Cette hypothèse revient à dire que dans une chaîne fermée de n cotes, l'image d'une cote $C_{i,j}$ ne pourra être déduite des autres cotes maxi et mini de la chaîne, que si elles sont statistiquement indépendantes.

En conséquence, s'il était possible sur une chaîne fermée de n cotes réelles, d'écrire n relations permettant de déduire l'une des n cotes réelles à partir des n-1 cotes réelles restantes, dans une chaîne fermée de n cotes, il n'existe au plus qu'une seule relation entre l'image d'une cote résultante et les n-1 images de cotes statistiquement indépendantes.

Exemple d'une chaîne fermée de 3 cotes :



Sur les cotes réelles, 3 relations :

$$C_{1,3}^* = C_{1,2}^* \oplus C_{2,3}^*$$

$$C_{1,2}^* = C_{1,3}^* \oplus C_{3,2}^*$$

$$C_{2,3}^* = C_{2,1}^* \oplus C_{1,3}^*$$

Sur les images des cotes, en vérifiant l'hypothèse que les cotes $C_{1,2}^*$ et $C_{2,3}^*$ sont indépendantes, une seule relation est possible :

$$\text{Image de } C_{1,3}^* = \text{Image } C_{1,2}^* \oplus \text{Image } C_{2,3}^*$$

1.5.2. Représentation vectorielle d'une chaîne "d'images" de cotes

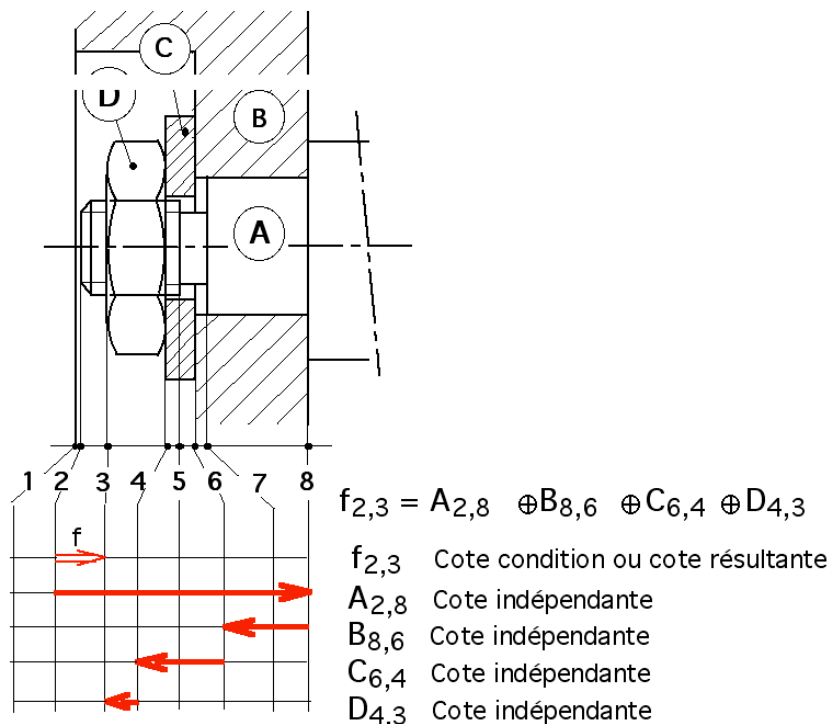
Afin de systématiser la mise en équation des relations entre les images de cotes de nombreux auteurs ont mis au point différentes méthodes de représentation des chaînes de cotes. Parmi celles-ci on peut retenir une représentation vectorielle qui suit les règles générales suivantes :

- la cote condition désigne la cote dépendante, elle est représentée par un vecteur symbolisé par une flèche à double trait,
- les cotes indépendantes sont représentées par des vecteurs symbolisés par des flèches à simple trait,
- la cote condition est le vecteur résultant de la somme vectorielle des cotes indépendantes de la chaîne.

De cette représentation, il est alors simple d'établir les relations entre les dimensions et les cotes maxi et mini.

Par exemple sur l'assemblage des 4 pièces A, B, C, D :

La condition fonctionnelle technique : le nombre de filets en prise avec l'écrou doit être suffisant ; se traduit par une condition sur la cote $C_{2,3}$ dont la dimension minimum doit être supérieure une valeur fixée à la conception.



La condition d'interchangeabilité impose que cette condition fonctionnelle soit réalisée à partir de "cotes fonctionnelles" réalisées sur les différentes pièces de l'assemblage. La cote condition sera ainsi la résultante des cotes fonctionnelles. L'application d'une relation de chaîne de cotes impose que les cotes fonctionnelles soient indépendantes entre elles, cette condition sera toujours réalisée s'il n'existe qu'une seule cote fonctionnelle par pièce. (Les pièces sont réalisées indépendamment les unes des autres, condition d'interchangeabilité)

on peut écrire les relations suivantes :

Relation vectorielle :

$$\overrightarrow{f_{2,3}} = \overrightarrow{A_{2,8}} + \overrightarrow{B_{8,6}} + \overrightarrow{C_{6,4}} + \overrightarrow{D_{4,3}}$$

Relation vectorielle projetée sur x (relation entre les valeurs des dimensions) :

$$f_{2,3} = a_{2,8} - b_{8,6} - c_{6,4} - d_{4,3}$$

Relations entre les valeurs des cotes maxi et mini :

$$f_{2,3\text{maxi}} = A_{2,8\text{maxi}} - B_{8,6\text{mini}} - C_{6,4\text{mini}} - D_{4,3\text{mini}}$$

$$f_{2,3\text{mini}} = A_{2,8\text{mini}} - B_{8,6\text{maxi}} - C_{6,4\text{maxi}} - D_{4,3\text{maxi}}$$

Relation entre les intervalles de tolérances :

$$IT f_{2,3} = IT A_{2,8} + IT B_{8,6} + IT C_{6,4} + IT D_{4,3}$$

Relations entre les cotes moyennes et les intervalles de tolérances :

$$f_{2,3\text{maxi}} = A_{2,8\text{moy}} + ITA_{2,8}/2 - B_{8,6\text{moy}} - ITB_{8,6}/2 - C_{6,4\text{moy}} - ITC_{6,4}/2 - D_{4,3\text{moy}} - ITD_{4,3}/2$$

$$f_{2,3\text{mini}} = A_{2,8\text{moy}} - ITA_{2,8}/2 + B_{8,6\text{moy}} + ITB_{8,6}/2 + C_{6,4\text{moy}} + ITC_{6,4}/2 + D_{4,3\text{moy}} + ITD_{4,3}/2$$

etc...

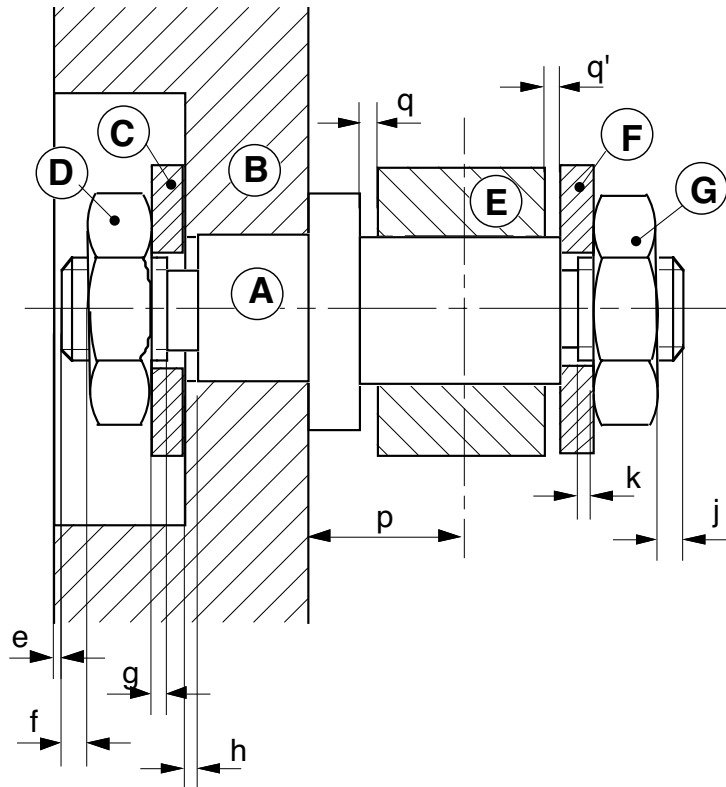
Chap 2 : Exemple de chaîne de cotes fonctionnelles

2.1. MODELISATION DES FONCTIONS D'UN MECANISME :

La conception d'un produit s'effectue autour des fonctions qu'il doit remplir. L'avant-projet permet d'exprimer ces fonctions sous formes de conditions fonctionnelles.

Dans une approche unidirectionnelle, les conditions fonctionnelles géométriques seront modélisées sur le dessin d'ensemble par des distances entre des bipoints limités par des bornes maxi ou (et) mini

Par exemple le bon fonctionnement du mécanisme suivant exige :



- un jeu mini de 0,2mm entre le galet E et ses pièces voisines A et F :
 $q'_{\text{mini}} \geq 0,2 \quad q_{\text{mini}} \geq 0,2$
- un déplacement maxi de 1,2mm du plan de symétrie du galet E par rapport à la pièce B
 $IT \, p \leq 1,2$
- un dépassement de 4 mm mini des 2 têtes de filetage de l'arbre A des 2 écrous G et D
 $j_{\text{mini}} \geq 4 \quad f_{\text{mini}} \geq 4$
- une longueur des deux filetages de l'arbre A suffisante pour que les deux écrous G et D soient toujours en prise sur leur filetage :
 $g_{\text{mini}} \geq 1 \quad k_{\text{mini}} \geq 1$
- un serrage entre les pièces A et B
 $h_{\text{mini}} \geq 1$
- un retrait de 0,5mm mini de la tête de l'arbre A par rapport à la pièce B
 $e_{\text{mini}} \geq 0,5$

2.2. REALISATION DES CONDITIONS FONCTIONNELLES :

Dans le cas d'une fabrication de type unitaire, les conditions fonctionnelles pourraient être directement respectées. En effet il est théoriquement possible d'ajuster l'ensemble des pièces au fur et à mesure de leur fabrication, mais pour des raisons de coût et d'interchangeabilité, il est préférable de fabriquer les pièces de façon indépendante.

Le respect des conditions fonctionnelles est assuré par l'assemblage de nouvelles conditions fonctionnelles imposées sur la géométrie de chaque pièce. Les conditions fonctionnelles de l'ensemble mécanique sont ainsi transférées sur les différentes pièces du mécanisme. On peut distinguer deux types de condition fonctionnelle : celles qui créent déjà un lien entre deux éléments géométriques appartenant à une pièce isolée et qui ne nécessitent aucun transfert, et celles qui créent un lien entre deux pièces et qui nécessite un transfert de la condition fonctionnelle.

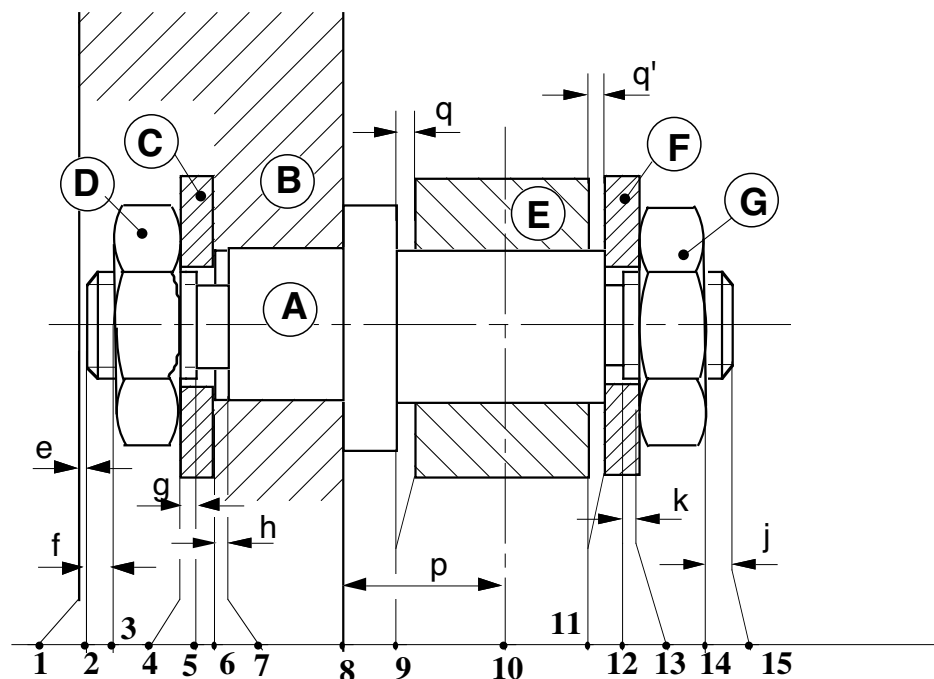
Le transfert de la condition fonctionnelle se fait en utilisant l'outil de calcul chaîne de cotes. La chaîne de cotes doit être la plus courte possible, elle est obtenue en reliant directement les surfaces de contacts des différentes pièces composant l'assemblage et concourant à la mise en place des 2 surfaces terminales de la condition fonctionnelle. On part ainsi de l'une des surfaces terminales limitant la condition fonctionnelle pour aboutir en passant de pièce en pièce à l'autre surface terminale.

2.2.1 Exemple

Convention de notation :

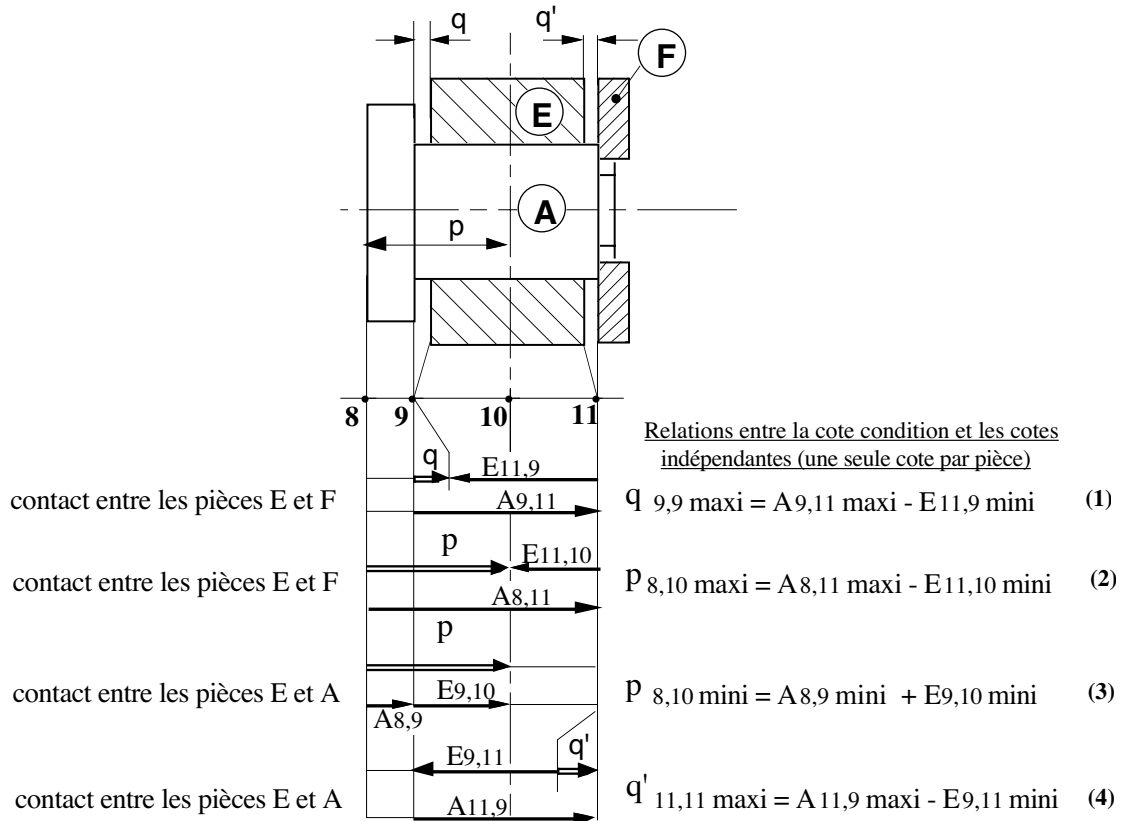
- Chaque condition fonctionnelle entre deux pièces est désignée par une lettre alphabétique minuscule.
- Chaque pièce est désignée par une lettre alphabétique majuscule.
- Les surfaces, les lignes et les points sont modélisés par des points numérotés de gauche à droite.
- lorsqu'il y a contact possible entre deux éléments géométriques (surface ligne ou point) ils seront désignés par le même numéro.

Étape 1 : Numérotation des différents points représentatifs des surfaces lignes et points :

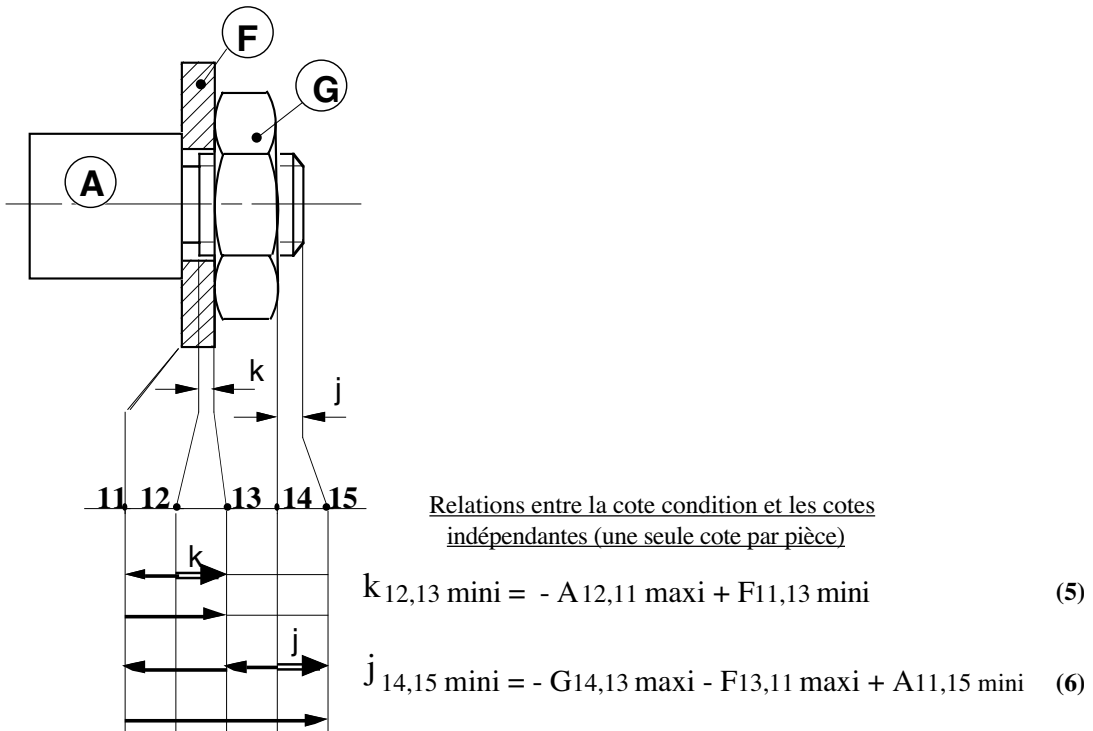


Étape 2 : Transfert des conditions fonctionnelles sur les différentes pièces :

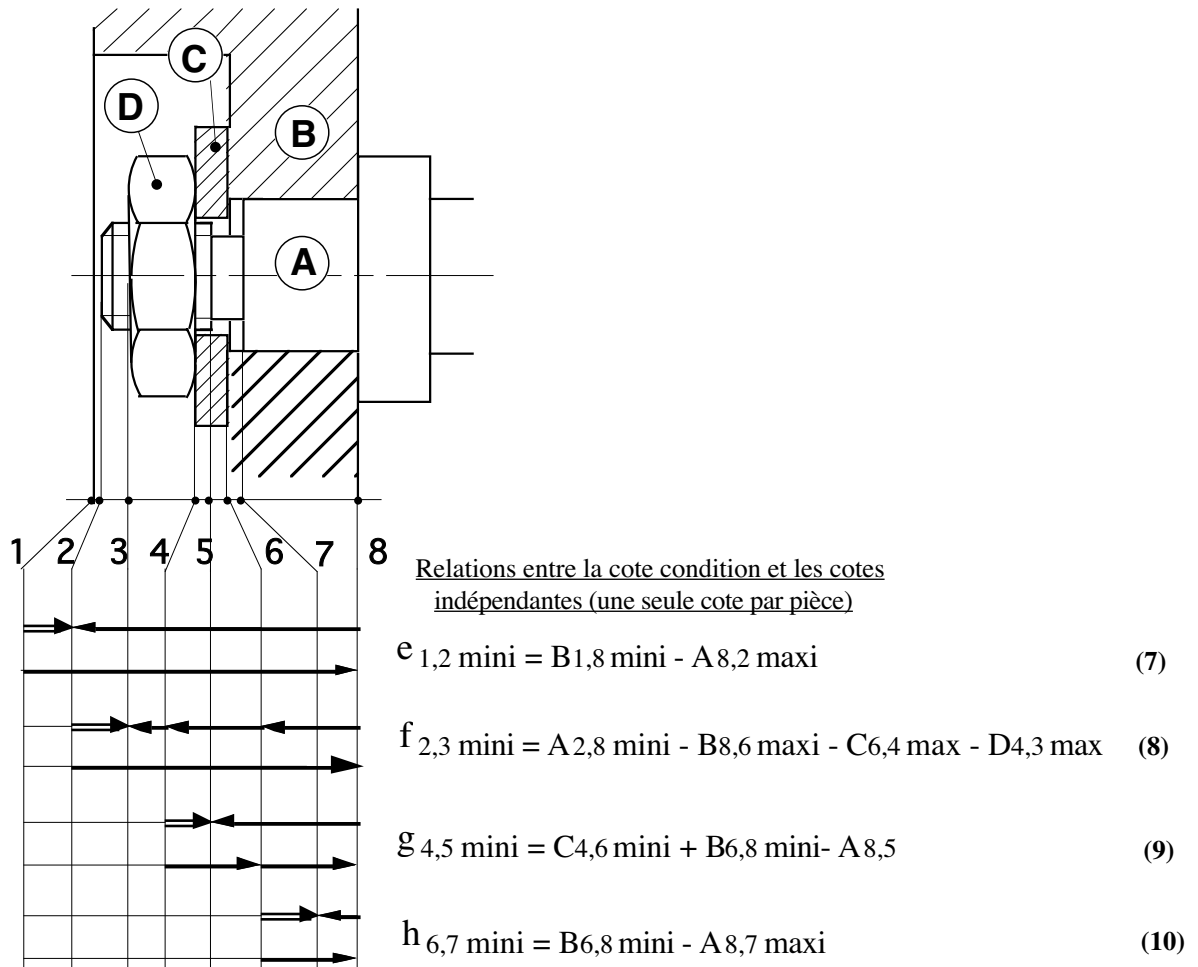
Transfert des conditions fonctionnelles q, p et p' sur les pièces A, E, F :



Transfert des conditions fonctionnelles k et j sur les pièces A, F, G :



Transfert des conditions fonctionnelles e, f, g et h sur les pièces B, C, D :



Étape 3 :

Les 9 conditions fonctionnelles de l'ensemble du mécanisme donnent 9 inéquations entre 19 conditions fonctionnelles transférées sur les pièces.

$$q_{9,9} \text{ maxi} \rightarrow A_{9,11} \text{ maxi} - E_{11,9} \text{ mini} \geq 0,2 \quad (1)$$

$$IT \ p_{8,10} = p_{8,10} \text{ maxi} - p_{8,10} \text{ mini} \quad \text{avec } E_{9,11} \text{ mini} = E_{11,10} \text{ mini} + E_{9,10} \text{ mini}$$

$$IT \ p_{8,10} \rightarrow A_{8,11} \text{ maxi} - A_{8,9} \text{ mini} - E_{9,11} \text{ mini} \leq 1,2 \quad (2) - (3)$$

$$q'_{11,11} \text{ maxi} \rightarrow A_{11,9} \text{ maxi} - E_{9,11} \text{ mini} \geq 0,2 \quad (4)$$

$$k_{12,13} \text{ mini} \rightarrow -A_{12,11} \text{ maxi} + F_{11,13} \text{ mini} \geq 1 \quad (5)$$

$$j_{14,15} \text{ mini} \rightarrow -G_{14,13} \text{ maxi} - F_{13,11} \text{ maxi} + A_{11,15} \text{ mini} \geq 4 \quad (6)$$

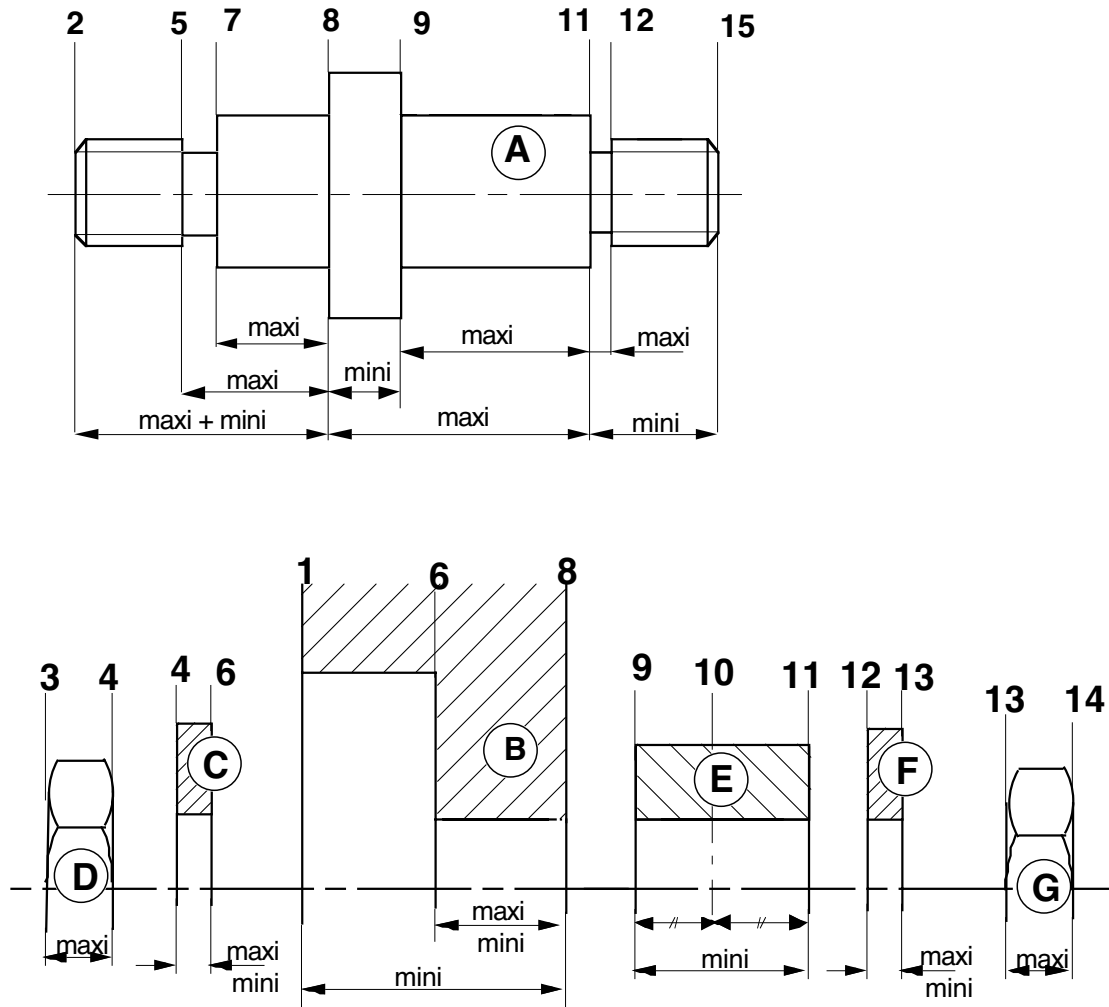
$$e_{1,2} \text{ mini} \rightarrow B_{1,8} \text{ mini} + A_{8,2} \text{ maxi} \geq 0,5 \quad (7)$$

$$f_{2,3} \text{ mini} \rightarrow A_{2,8} \text{ mini} - B_{8,6} \text{ maxi} - C_{6,4} \text{ maxi} - D_{4,3} \text{ maxi} \geq 4 \quad (8)$$

$$g_{4,5} \text{ mini} \rightarrow C_{4,6} \text{ mini} + B_{6,8} \text{ mini} - A_{8,5} \text{ maxi} \geq 1 \quad (9)$$

$$h_{6,7} \text{ mini} \rightarrow B_{6,8} \text{ mini} - A_{8,7} \text{ maxi} \geq 1 \quad (10)$$

Conditions fonctionnelles reportées sur chaque pièce :



Il existe une infinité de solutions dans l'attribution de valeurs aux 19 conditions fonctionnelles transférées sur chaque pièce. Le choix d'une solution de cotation doit prendre en compte d'autres critères et principalement les coûts de production.

Pour cela on choisit des composants du marché tolérancés sur catalogue (par exemple les deux écrous D et G) , sinon le choix est fait sur les conseils d'experts en production.

Nous proposons d'apporter une aide supplémentaire au tolérancement en prenant en compte les contraintes de fabrication sous la forme de chaînes de cotes de fabrication.

Chap 3 : Chaîne de cotes de fabrication (Modèle des Δl_i)

31. MODELISATION GEOMETRIQUE DES MOYENS DE PRODUCTION

Une pièce fabriquée est composée de surfaces (S_u) obtenues successivement dans des repères liés aux différents moyens de production (empreinte d'une matrice d'estampage, empreinte d'un moule, bati d'une machines outils, etc...)

Chaque étape de la production est caractérisée géométriquement par un changement de repère c'est à dire par un démontage de la pièce du moyen de production.

Certaines étapes telles que l'usinage nécessitent un posage de la pièce dans un porte pièce. Le posage est assuré par une surface de référence (S_r) en appui sur le porte pièce

Dans un même repère, la dimension obtenue entre deux surfaces S_u , ou deux surfaces S_u et S_r , sera incluse dans une cote fabriquée qui résulte d'une chaîne dimensionnelle passant par le moyen de production.

Cette boucle sera modélisée par deux côtes de simulation L_i indépendantes. Ces deux cotes de simulation représentent les intervalles de variation Δl_i de mise en position des deux surfaces dans un repère lié au moyen de production.

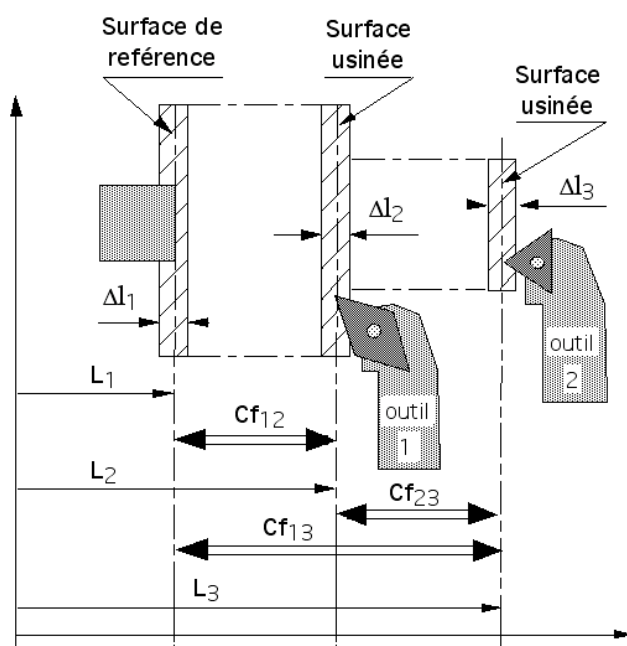
Les intervalles de variation Δl_i englobent toutes les variations possibles et devront, numériquement être supérieurs à des valeurs minimales propres au comportement du moyen de production.

A titre d'exemple nous pouvons illustrer le modèle de simulation sur une étape d'usinage de 2 surfaces.

Chaque pièce de la série occupe une position unique dans le repère fixe lié à la machine-outil.

Δl_i représente la distance entre deux plans parallèles enveloppant toutes les positions que pourrait prendre chacune des surfaces S_u et S_r si plusieurs séries de pièces étaient réalisées.

Δl_i est la dispersion permise d'une cote de simulation L_i représentant la variation de position d'une surface dans un repère fixe lié à la machine de production.



Les causes de variation des Δl_i sont considérées indépendantes et aléatoires.

En conséquence toutes les surfaces S_u et S_r peuvent être liées deux à deux par une cote de fabrication C_{fij} résultante de deux côtes de simulation L_i et L_j indépendantes.

Dans l'exemple d'une pièce composée de 3 surfaces on obtient trois côtes fabriquées C_{f12} , C_{f23} , C_{f13} de la forme :

$$C_{f12} = \text{résultante de } \{L_1, L_2\}$$

$$C_{f23} = \text{résultante de } \{L_2, L_3\}$$

$$C_{f13} = \text{résultante de } \{L_1, L_3\}$$

Les cotes de simulation étant indépendantes on peut établir les relations classiques:

- sur les cotes maxi et mini :

$$C_{f12M} = L_{2M} - L_{1m}$$

$$C_{f23M} = L_{3M} - L_{2m}$$

$$C_{f13M} = L_{3M} - L_{1m}$$

$$C_{f12m} = L_{2m} - L_{1M}$$

$$C_{f23m} = L_{3m} - L_{2M}$$

$$C_{f13m} = L_{3m} - L_{1M}$$

- sur les dispersions centrées :

$$\Delta C_{f12} = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$\Delta C_{f23} = \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$\Delta C_{f13} = \Delta l_3 + \Delta l_1$$

Remarque : Les 3 cotes C_{f12} , C_{f23} et C_{f13} ne sont pas indépendantes, en effet, si par exemple la cote ΔC_{f13} était déduite des deux cotes ΔC_{f12} et ΔC_{f23} on aurait la relation :

$$\Delta C_{f13} = \Delta C_{f12} + \Delta C_{f23} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

soit $\Delta C_{f13} = \Delta l_1 + 2 \Delta l_2 + \Delta l_3$ au lieu de $\Delta C_{f13} = \Delta l_3 + \Delta l_1$. En effet, la somme de 2 fois la borne commune donne un ensemble vide de dimensions (Cf 1.3.1).

3.2 INTERVALLE DE TOLERANCE Δl_i

Chaque tolérance Δl_i englobe l'ensemble de toutes les incertitudes, c'est-à-dire une dispersion aléatoire Δl_{ia} , une zone de réglage Δr incluant une dispersion de réglage Δr , et une zone de dispersion systématique Δs . Expérimentalement il est possible par étude statistique, de déterminer ces différents paramètres. L'étendue Δl_{ia} des valeurs aléatoires de la dispersion est définie par le critère d'indépendance entre les Δl_i , et par des conditions d'essais particuliers.

321. Exemple de détermination expérimentale des dispersions aléatoires et systématiques.

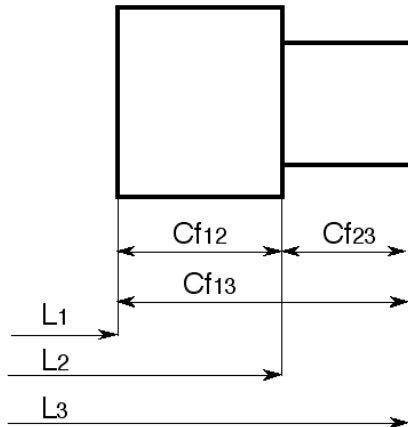
3211. Conditions expérimentales

Comme nous l'avons vu précédemment toute cote fabriquée C_{fij} obtenue sur une série de pièces est la somme de deux cotes L_i passant par la "machine-outil". Soit la relation sur les dispersions :

$$\Delta C_{f12} = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

Par mesure, on connaît les cotes réelles fabriquées C_{fij}

Afin d'obtenir 3 conditions à 3 inconnues, il est nécessaire de choisir une sous-phase où 2 surfaces aux moins sont usinées sans démontage de la pièce.



$$\Delta Cf_{12} = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$\Delta Cf_{23} = \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$\Delta Cf_{13} = \Delta l_1 + \Delta l_3$$

On se place dans les conditions d'essais suivantes

- l'équilibre thermique est atteint,
- l'usure de l'outil est une fonction linéaire de la longueur du copeau,
- les dispersion de mise en position des surfaces dans le repère de la phase d'usinage sont aléatoires
- etc...

Sur chaque pièce de la série on mesure les valeurs de deux dimensions dij, la troisième valeur est déduite par la somme des deux premières.

On prend soin d'effectuer les mesures de dij en intégrant les défauts de parallélisme entre les surfaces.

On obtient ainsi un tableau de valeurs correspondant aux 2 cotes réelles d12 et d13 mesurées et à la troisième cote réelle d23 calculée.

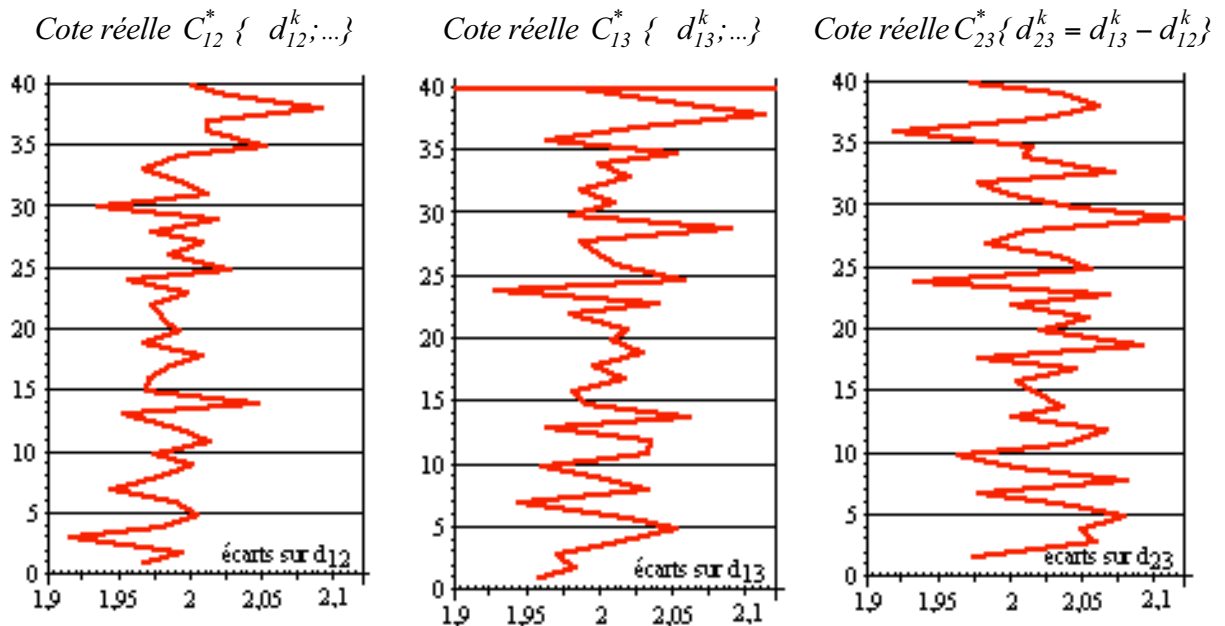
Tableau de valeurs

N°	d12	d13	d23=d13-d12
1	0,993	1,957	0,964
2	1,014	1,98	0,966
3	0,952	1,968	1,016
4	1,002	2,012	1,01
5	1,023	2,051	1,028
6	1,011	2,018	1,007
7	0,975	1,942	0,967
8	1,002	2,031	1,029
9	1,02	2,003	0,983
10	0,999	1,958	0,959
11	1,03	2,031	1,001
12	1,013	2,033	1,02
13	0,982	1,962	0,98
14	1,057	2,059	1,002
15	0,995	1,987	0,992
16	0,996	1,979	0,983
17	1,008	2,015	1,007
18	1,026	1,993	0,967
19	0,993	2,028	1,035
20	1,013	2,006	0,993

N°	d12	d13	d23=d13-d12
21	1,004	2,017	1,013
22	0,997	1,977	0,98
23	1,017	2,039	1,022
24	0,985	1,926	0,941
25	1,042	2,056	1,014
26	1,008	2,009	1,001
27	1,026	1,996	0,97
28	0,998	1,985	0,987
29	1,035	2,088	1,053
30	0,968	1,977	1,009
31	1,028	2,008	0,98
32	1,018	1,985	0,967
33	0,994	2,018	1,024
34	1,011	1,997	0,986
35	1,062	2,051	0,989
36	1,029	1,961	0,932
37	1,029	2,022	0,993
38	1,093	2,11	1,017
39	1,042	2,043	1,001
40	1,02	1,985	0,965

3212 *Hystogramme et interprétation*

Pour chaque cote, on trace (sous excel de Microsoft) l'évolution des dimensions en fonction du n° d'ordre d'usinage.



L'allure générale de l'évolution montre si on est bien dans l'hypothèse d'un équilibre thermique de la machine (une mesure de la température de la machine en cours d'usinage permet une meilleure interprétation) . Dans le cas traité, aucune évolution thermique n'apparaît

On remarque par contre une évolution linéaire due certainement à l'usure d'outil. Cette évolution est calculée par une droite des moindres carrés. (voir graphe ci contre pour la cote réelle C_{12}^*)

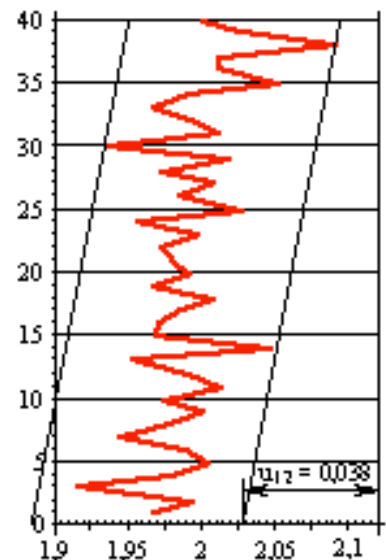
Pour chaque cote on trouve une évolution linéaire de pente différente (ce qui correspond à un usinage avec 2 outils différents) .

On lit les usures d'outil totales suivantes :

$$u_{12} = 0,038 \quad u_{13} = 0,031 \quad u_{23} = 0,006$$

On remarque que $u_{23} \approx u_{13} - u_{12}$

On peut donc conclure en une bonne compatibilité des résultats.



Remarque :

511. Dans le cas particulier où les surfaces seraient usinées avec le même outil, on devrait trouver : $u_{12} = u_{13}$ et par suite $u_{23} = 0$.

- Dans le cas où la dispersion aléatoire est grande devant l'usure d'outil, il n'est plus alors possible de reconnaître une évolution linéaire caractéristique. Les usures d'outil sont négligeables devant les dispersions

- Les résultats de l'essais présenté correspondent à un usinage en continue d'une série de 40 pièces, sans changement de réglage des outils en cours de production (correcteurs d'outil fixes).

322. Évaluation des dispersions aléatoires

1/ Pour chaque dimension on retranche (ou on ajoute) la part due à l'usure d'outil.

Exemple pour la cote C_{12}^* :

l'usure totale est de 0,038

l'usure par pièce est $U_p = 0,038/39 = 0,000775$

Ce qui donne le tableau suivant :

N°	d12	d12 redressé	N°	d12	d12 redressé
1	0,993	0,993	21	1,004	0,985
2	1,014	1,013	22	0,997	0,977
3	0,952	0,950	23	1,017	0,996
4	1,002	0,999	24	0,985	0,963
5	1,023	1,019	25	1,042	1,019
6	1,011	1,006	26	1,008	0,984
7	0,975	0,969	27	1,026	1,001
8	1,002	0,995	28	0,998	0,972
9	1,020	1,012	29	1,035	1,008
10	0,999	0,990	30	0,968	0,940
11	1,030	1,021	31	1,028	1,000
12	1,013	1,003	32	1,018	0,989
13	0,982	0,971	33	0,994	0,964
14	1,057	1,045	34	1,011	0,980
15	0,995	0,982	35	1,062	1,029
16	0,996	0,982	36	1,029	0,996
17	1,008	0,993	37	1,029	0,994
18	1,026	1,010	38	1,093	1,057
19	0,993	0,976	39	1,042	1,005
20	1,013	0,995	40	1,020	0,982

Résultats statistiques de la dispersion aléatoire (en mm):

Étendue 0,117

Moyenne statistique : 0,994

Variance 0,001

Écart type 0,023

Intervalle de confiance à 6σ : 0,140 (risque $\alpha = 2,8\%$ pour une distribution gaussienne de la population)

2/ Recherche des points aberrants :

Tout dimension en dehors de l'intervalle $\pm 3,5 \sigma$ peut-être considéré comme une dimension aberrante (risque de 0,04%) et être supprimée de l'essais.

3/ Calcul des caractéristiques des dispersions aléatoires des cotes fabriquées.

Pour chaque cote fabriquée on calcule de la même façon :

l'intervalle de tolérance aléatoire IT_a de l'échantillon usiné

l'écart type σ' (de la population)

l'intervalle de tolérance estimé IT = 6. σ' avec un risque $\alpha = 2,8\%$ pour une distribution gaussienne de la population

On trouve ici :

	Cote C_{I2}^*	Cote C_{I3}^*	Cote C_{23}^*
l'intervalle de tolérance IT _a de l'échantillon usiné	0,117	0,173	0,119
l'écart type estimé σ de la population	0,023	0,038	0,026
l'intervalle de tolérance estimé à 6. σ' ($\alpha = 0,3\%$)	0,140	0,225	0,157

Ces résultats permettent de résoudre 3 équations à 3 inconnues :

Soit :

$$\Delta C_{f12a} = \Delta l_{1a} + \Delta l_{2a}$$

$$\Delta C_{f23a} = \Delta l_{2a} + \Delta l_{3a}$$

$$\Delta C_{f13a} = \Delta l_{3a} + \Delta l_{1a}$$

On en déduit :

a) les dispersions aléatoires de mise en position des surfaces sur un échantillon de 40 pièces.

$$0,117 = \Delta l_{1a} + \Delta l_{2a}$$

$$0,173 = \Delta l_{2a} + \Delta l_{3a}$$

$$0,119 = \Delta l_{3a} + \Delta l_{1a}$$

soit : $\Delta l_{1a} = 0,086$

$$\Delta l_{2a} = 0,032$$

$$\Delta l_{3a} = 0,087$$

Chap 4 : Chaîne de cotes de fabrication (Mode opératoire)

=====

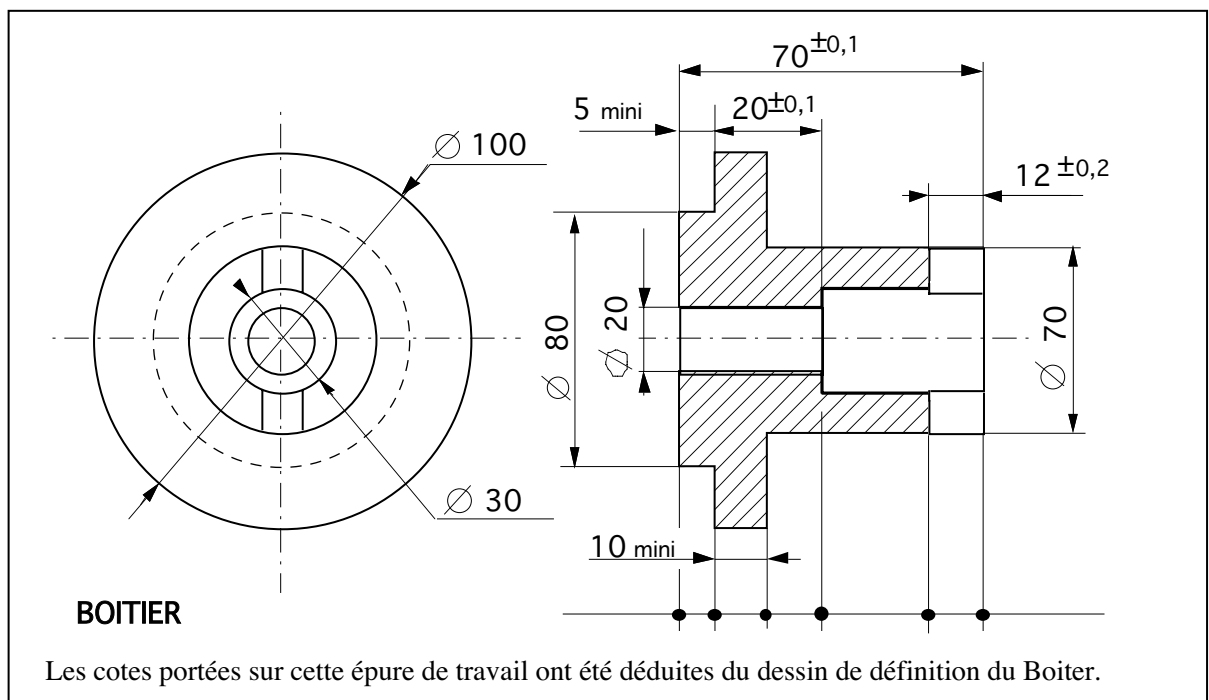
4.1 GRAPHE DE FABRICATION

Le modèle des ΔI proposé au chapitre précédent permet, sous forme de graphe, une résolution systématique du choix des cotes fabriquées et de la répartition des tolérances.

Ce formalisme peut être illustré sur un exemple traité dans une seule direction de cotation. On se place dans le cas où les spécifications normalisées du dessin de définition de la pièce ont été traduites sous forme de cotes fonctionnelles.

4.1.1 Étape 1 : données

Le dessin du boîtier traduit sous forme de cotes, les conditions à respecter. Suivant la direction étudiée 5 cotes sont à considérer : 3 cotes bilimites données par leurs cotes maxi et mini ($70 \pm 0,1$; $20 \pm 0,1$; $12 \pm 0,2$) et 2 cotes unilimites données par leur cote mini (5 mini et 10 mini).



4.1.2 Étape 2 : Proposition d'un processus de réalisation

Cette pièce est réalisée à partir d'une préforme obtenue par forgeage. Les phases d'usinage sont les suivantes :

- sur tour, ébauche puis finition des cylindres de diamètre 100, 80 et des surfaces qui leur sont associés.
- sur tour, ébauche et finition des cylindres de diamètre 70, 20, 30 et des surfaces qui leur sont associés.

- sur fraiseuse, réalisation de la rainure de profondeur $12 \pm 0,2$.

À chaque étape de réalisation, on associe un repère lié au moyen de production (matrice, machines-outils). Les différentes surfaces aussi bien d'ébauche que de finition apparaissent sur le graphe de fabrication.

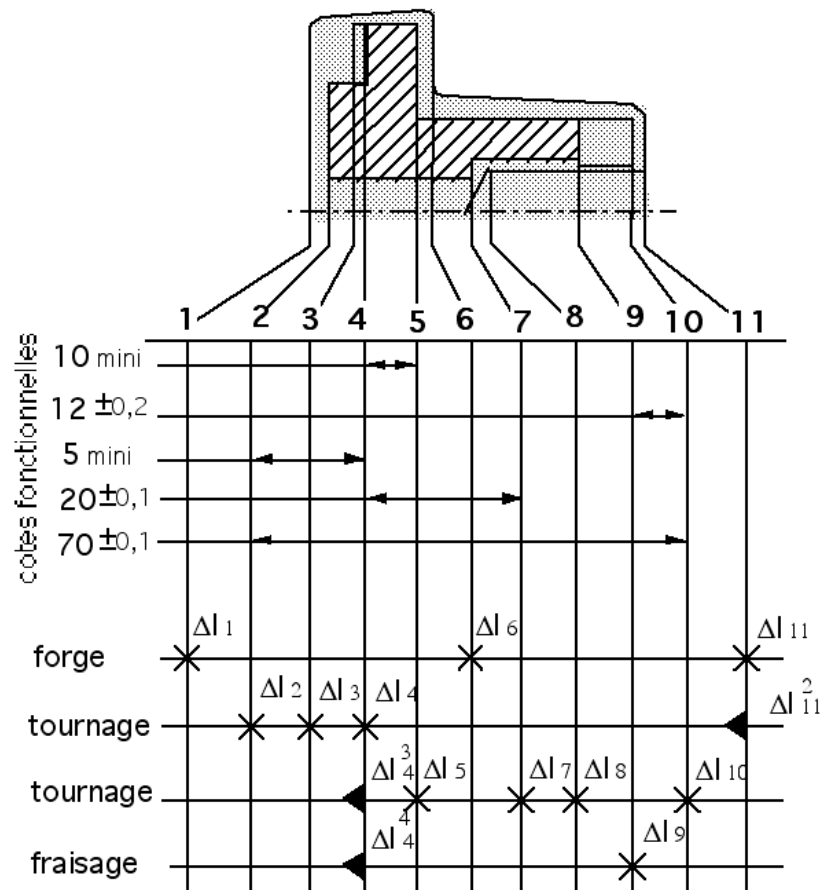
4.1.3 Étape 3 : Graphe de simulation de la fabrication

Sur ce graphe, chaque repère est représenté par une ligne, et chaque surface par une colonne.

Par convention, dans un repère, une croix désigne une surface créée dans la phase, et un triangle une surface de contact entre la pièce et son porte pièce.

Les intervalles de tolérance des cotes de simulation L_i sont notés Δl_i pour les surfaces créées, et par Δl_i^j pour les surfaces de contact. L'indice i est le numéro de la surface concernée, l'exposant j est le numéro de la phase ou du repère.

En tête du graphe, on représente par des flèches, les différentes cotes faisant l'objet de la simulation.



4.1.4 Calcul des intervalles de tolérance Δl_i imposés par les cotes bilimites

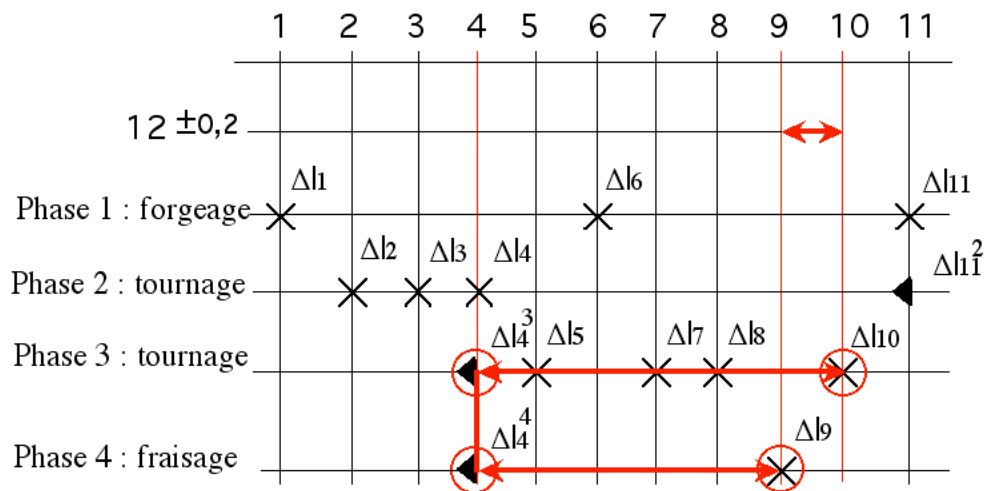
À toute cote bilimite correspond une contrainte entre les intervalles de tolérance Δl_i des cotes de simulation L_i . À l'aide du graphe de simulation de la fabrication, on écrit immédiatement pour cet exemple, les 3 relations correspondant aux 3 cotes bilimites ($70 \pm 0,1$; $20 \pm 0,1$; $12 \pm 0,2$) :

Expression de l'intervalle de tolérance de la cote fabriquée $Cf_{9,10}$ correspondant à la cote fonctionnelle de $12 \pm 0,2$ entre les surfaces 9 et 10

$$(1) \quad \Delta Cf_{9,10} = \underbrace{\Delta l_9 + \Delta l_4^4}_{\Delta Cf_{9,4}^4} + \underbrace{\Delta l_4^3 + \Delta l_{10}}_{\Delta Cf_{4,10}^3} \leq 0,4$$

Cette relation est obtenue en parcourant le graphe de simulation. Le trajet minimal (qui est unique) est construit en appliquant les deux règles suivantes :

- choisir une seule cote fabriquée par phase (dont l'intervalle de tolérance est la somme de deux intervalles de tolérance Δl_i)
- passer d'une phase à une autre par une même surface.



On obtient ainsi les expressions :

de l'intervalle de tolérance de la cote fabriquée $Cf_{4,7}$ correspondant à la cote fonctionnelle de $20 \pm 0,1$ entre les surfaces 4 et 7

$$(2) \quad \Delta Cf_{4,7}^3 = \Delta l_4^3 + \Delta l_7 \leq 0,2$$

et de l'intervalle de tolérance de la cote fabriquée $Cf_{2,10}$ correspondant à la cote fonctionnelle de $70 \pm 0,1$ entre les surfaces 2 et 10

$$(3) \quad \Delta Cf_{2,10} = \underbrace{\Delta l_2 + \Delta l_4}_{\Delta Cf_{2,4}^2} + \underbrace{\Delta l_4^3 + \Delta l_{10}}_{\Delta Cf_{4,10}^3} \leq 0,2$$

Le système d'inéquations formé de (1), (2), (3) est résolu en maximisant successivement les valeurs des intervalles de tolérances Δl_i les plus restrictives, et en imposant que chaque valeur d'un intervalle de tolérance Δl_i soit supérieure à une valeur minimale Δl_{ai} exprimant la dispersion aléatoire correspondante.

4.2 REPARTITION OPTIMALE DES TOLERANCES

La résolution peut-être réalisée à l'aide d'un tableur tel que Excel :

Premier état du tableau :

	Δl_1	Δl_2	Δl_3	Δl_4	Δl_4^3	Δl_4^4	Δl_5	Δl_6	Δl_7	Δl_8	Δl_9	Δl_{10}	Δl_{11}	Δl_{11}^2	Somme des Δl	IT	somme des coef	Ecart	accroissement
valeur de Δl	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,2					
coefficient	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
12±0,2					0,03	0,03					0,02	0,02			0,1	0,4	4	0,3	0,075
20±0,1					0,03				0,02						0,05	0,2	2	0,15	0,075
70±0,1		0,02		0,02	0,03							0,02			0,09	0,2	4	0,11	0,0275

Deuxième état du tableau :

	Δl_1	Δl_2	Δl_3	Δl_4	Δl_4^3	Δl_4^4	Δl_5	Δl_6	Δl_7	Δl_8	Δl_9	Δl_{10}	Δl_{11}	Δl_{11}^2	Somme des Δl	IT	somme des coef	Ecart	accroissement
valeur de Δl	0,02	0,048	0,02	0,048	0,058	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,048	0,02	0,2					
coefficient	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1					
12±0,2					0,03	0,03					0,02	0,02			0,156	0,4	2	0,244	0,122
20±0,1					0,03				0,02						0,78	0,2	1	0,122	0,122
70±0,1		0,048		0,048	0,058							0,048			0,2	0,2	0	0	-

Troisième état du tableau :

	Δl_1	Δl_2	Δl_3	Δl_4	Δl_4^3	Δl_4^4	Δl_5	Δl_6	Δl_7	Δl_8	Δl_9	Δl_{10}	Δl_{11}	Δl_{11}^2	Somme des Δl	IT	somme des coef	Ecart	accroissement
valeur de Δl	0,02	0,048	0,02	0,048	0,058	0,152	0,02	0,02	0,142	0,02	0,142	0,048	0,02	0,2					
coefficient	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1					
12±0,2					0,058	0,152					0,142	0,048			0,4	0,4	0	0	-
20±0,1					0,058				0,142						0,2	0,2	0	0	-
70±0,1		0,048		0,048	0,058							0,048			0,2	0,2	0	0	-

Afin de donner des résultats au 0,01mm près, on obtient :

	Δl_1	Δl_2	Δl_3	Δl_4	Δl_4^3	Δl_4^4	Δl_5	Δl_6	Δl_7	Δl_8	Δl_9	Δl_{10}	Δl_{11}	Δl_{11}^2	Somme des Δl	IT	somme des coef	Ecart	accroissement
valeur de Δl	0,02	0,05	0,02	0,05	0,05	0,15	0,02	0,02	0,15	0,02	0,15	0,05	0,02	0,2					
coefficient	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1					
12±0,2					0,05	0,15					0,15	0,05			0,4	0,4	0	0	-
20±0,1					0,05				0,15						0,2	0,2	0	0	-
70±0,1		0,05		0,05	0,05							0,05			0,2	0,2	0	0	-

Soit les valeurs :

$$\Delta l_2 = 0,05 \quad \Delta l_4 = 0,05 \quad \Delta l_4^3 = 0,05 \quad \Delta l_4^4 = 0,15 \quad \Delta l_7 = 0,15 \quad \Delta l_9 = 0,15 \quad \Delta l_{10} = 0,05$$

Les valeurs des intervalles de tolérance Δl_i non imposées par des cotes bilimites sont choisies afin de les obtenir à coût minimal, c'est-à-dire sans contraintes particulières :

$$\Delta l_3 = 0,15 \quad \Delta l_5 = 0,15 \quad \Delta l_{11}^2 = 0,3 \quad \Delta l_8 = 0,15$$

4.2.1 Calcul des valeurs des intervalles de tolérance des cotes unilimites :

La connaissance des valeurs des intervalles de tolérance Δl_i permet de calculer les valeurs des intervalles de tolérance des cotes unilimites déduites du dessin de définition ou des exigences de production.

Dans l'exemple traité, le dessin de définition impose 2 cotes unilimites 10mini et 5mini.

D'autre part en usinage, les conditions de coupe imposent dans cet exemple un copeau mini en ébauche de 2mm et un copeau mini en finition de 0,2mm.

Ces contraintes se traduisent par les équations suivantes :

Intervalle de tolérance de la cote fabriquée entre les surfaces 4 et 5 (correspondant à la cote 10 mini):

$$(4) \quad \Delta Cf_{4,5}^3 = \Delta l_4^3 + \Delta l_5 = 0,2$$

Intervalle de tolérance de la cote fabriquée entre les surfaces 2 et 4 (correspondant à la cote 5 mini) :

$$(5) \quad \Delta Cf_{2,4}^2 = \Delta l_2 + \Delta l_4 = 0,1$$

Intervalle de tolérance du copeau d'ébauche entre les surfaces 1 et 2 (2 mini):

$$(6) \quad \Delta Cf_{1,2} = \underbrace{\Delta l_1 + \Delta l_{11}}_{\Delta Cf_{1,11}^1} + \underbrace{\Delta l_{11}^2 + \Delta l_2}_{\Delta Cf_{11,2}^2} = 2,35 \quad \text{avec } \Delta Cf_{1,11}^1 = 2 \text{ (pièce brute)}$$

Intervalle de tolérance du copeau d'ébauche entre les surfaces 5 et 6 (2 mini):

$$(7) \quad \Delta Cf_{5,6} = \underbrace{\Delta l_5 + \Delta l_4^3}_{\Delta Cf_{5,4}^3} + \underbrace{\Delta l_4 + \Delta l_{11}^2}_{\Delta Cf_{4,11}^2} + \underbrace{\Delta l_{11} + \Delta l_6}_{\Delta Cf_{6,11}^1} = 2,55 \quad \text{avec } \Delta Cf_{6,11}^1 = 2 \text{ (pièce brute)}$$

Intervalle de tolérance du copeau d'ébauche entre les surfaces 10 et 11 (2mini) :

$$(8) \quad \Delta Cf_{10,11} = \underbrace{\Delta l_{10} + \Delta l_4^3}_{\Delta Cf_{10,4}^3} + \underbrace{\Delta l_4 + \Delta l_{11}^2}_{\Delta Cf_{4,11}^2} = 0,45$$

Intervalle de tolérance du copeau de finition entre les surfaces 3 et 4 (0,2mini) :

$$(9) \quad \Delta Cf_{3,4}^2 = \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0,2$$

Intervalle de tolérance du copeau de finition entre les surfaces 7 et 8 (0,2mini) :

$$(10) \quad \Delta Cf_{7,8}^3 = \Delta l_7 + \Delta l_8 = 0,3$$

4.3 CHOIX DES COTES FABRIQUEES

4.3.1 Cotes fabriquées :

Les 10 relations précédentes simulent la production, on peut donc affirmer que si ces 10 relations sont vérifiées en cours de production, la pièce sera conforme aux cotes déduites du dessin de définition.

Ces 10 relations établissent des relations entre des cotes fabriquées, celles-ci permettent immédiatement d'établir la cotation de la pièce brute et des géométries prises successivement par la pièce au cours de sa réalisation.

Par exemple la relation (7) $\Delta Cf_{5,6} = \Delta l_5 + \Delta l_4^3 + \Delta l_4 + \Delta l_{11}^2 + \Delta l_{11} + \Delta l_6$ impose les 3 cotes fabriquées suivantes :

$\Delta l_5 + \Delta l_4^3$ impose la cote fabriquée $Cf_{4,5}^3$ entre les surfaces 4 et 5 (phase 3 : tournage)

$\Delta l_4 + \Delta l_{11}^2$ impose la cote fabriquée $Cf_{11,4}^2$ entre les surfaces 11 et 4 (phase 2 : tournage)

$\Delta l_{11} + \Delta l_6$ impose la cote du brut $Cf_{6,11}^1$ entre les surfaces 6 et 11 (phase 1 : forgeage)

4.3.2 Calcul des cotes moyennes des cotes fabriquées

Le calcul des cotes moyennes revient à déterminer (n-1) dimensions moyennes indépendantes positionnant les n surfaces.

Dans cet exemple, 10 dimensions moyennes pour 11 surfaces sont à définir. Cela revient à résoudre un système de 10 équations à 10 inconnues. Chaque cote bilimite donne directement une équation, la connaissance des intervalles de tolérance des cotes unilimites permettent de définir les dimensions moyennes correspondantes.

$$\bar{d}_{9,10} = 12$$

$$\bar{d}_{4,7} = 20$$

$$\bar{d}_{2,10} = 70$$

$$\bar{d}_{4,5} = 10_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{4,5}}{2} = 10,1 \quad \text{avec } \Delta Cf_{4,5} = 0,2 \text{ cf. équation (4)}$$

$$\bar{d}_{2,4} = 5_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{2,4}}{2} = 5,05 \quad \text{avec } \Delta Cf_{2,4} = 0,1 \text{ cf. équation (5)}$$

$$\bar{d}_{1,2} = 2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{1,2}}{2} = 3,175 \quad \text{avec } \Delta Cf_{1,2} = 2,35 \text{ cf. équation (6)}$$

$$\bar{d}_{5,6} = 2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{5,6}}{2} = 3,275 \quad \text{avec } \Delta Cf_{5,6} = 2,55 \text{ cf. équation (7)}$$

$$\bar{d}_{10,11} = 2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{10,11}}{2} = 2,225 \quad \text{avec } \Delta Cf_{10,11} = 0,45 \text{ cf. équation (8)}$$

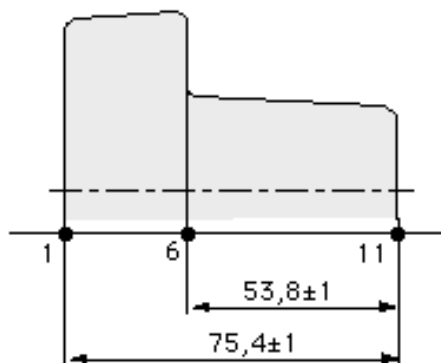
$$\bar{d}_{3,4} = 0,2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{3,4}}{2} = 0,3 \quad \text{avec } \Delta Cf_{3,4} = 0,2 \text{ cf. équation (9)}$$

$$\bar{d}_{7,8} = 0,2_{\min i} + \frac{\Delta Cf_{7,8}}{2} = 0,35 \quad \text{avec } \Delta Cf_{7,8} = 0,3 \text{ cf. équation (10)}$$

Après calcul des dimensions moyennes des cotes fabriquées de chaque phase, on obtient:

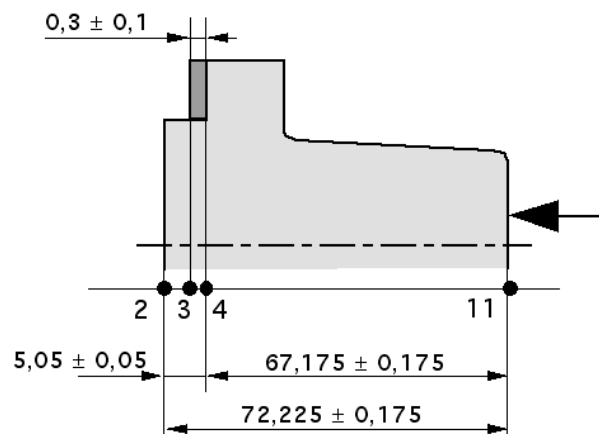
Phase 1 : forgeage

Cotes fabriquées du brut : $Cf_{1,11}^1$; $Cf_{5,11}^1$



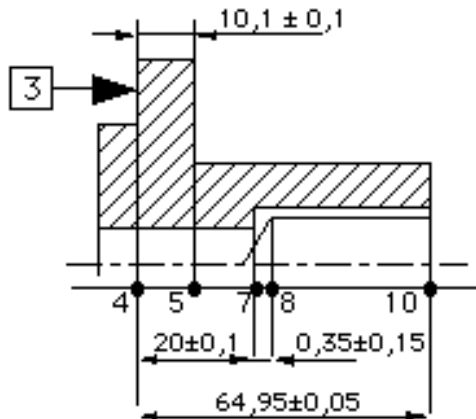
Phase 2 : tournage

Cotes fabriquées : $Cf_{2,4}^2$; $Cf_{2,11}^2$; $Cf_{3,4}^2$; $Cf_{4,11}^2$



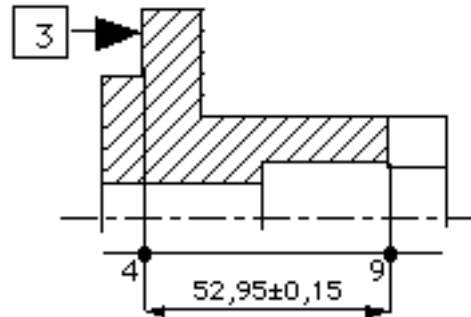
Phase 3 : tournage

Cotes fabriquées: $Cf_{4,5}^3$; $Cf_{4,7}^3$; $Cf_{4,10}^3$; $Cf_{7,8}^3$



Phase 4 : fraisage

Cotes fabriquées : $Cf_{4,9}^3$



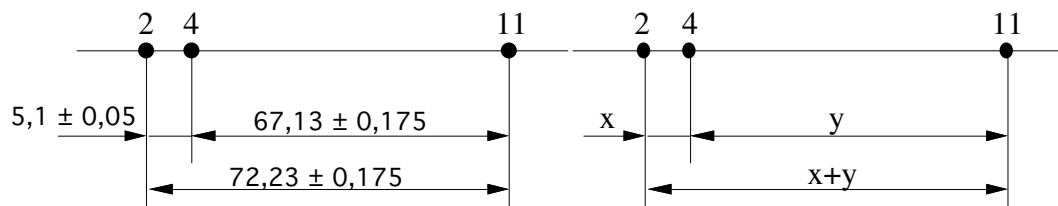
4.3.3 Remarque sur les chaînes fermées de cotes

Dans l'exemple traité, les cotes fabriquées obtenues dans la phase 2 de tournage forment une chaîne fermée de trois cotes. Il est souvent recommandé par habitude, de supprimer l'une des trois cotes pour respecter la règle, souvent non justifiée, de ne jamais utiliser sur une même pièce une chaîne fermée de cotes.

Si cette règle est appliquée, elle a pour conséquence immédiate de réduire les valeurs des intervalles de tolérance des deux cotes fabriquées choisies, et par suite de déclarer hors tolérances des pièces capables de satisfaire pleinement les cotes fonctionnelles du dessin de définition.

A l'aide d'un graphique, il est possible, dans l'exemple traité, de représenter par une surface hachurée le domaine où les valeurs des écarts x , y et z des trois dimensions $d_{1,2}$, $d_{2,3}$ et $d_{1,3}$ de la pièce sont en conformité avec les exigences des trois cotes $5,1 \pm 0,05$, $67,13 \pm 0,175$ et $72,23 \pm 0,175$.

Cas où l'on vérifie les trois écarts x , y et $x+y$

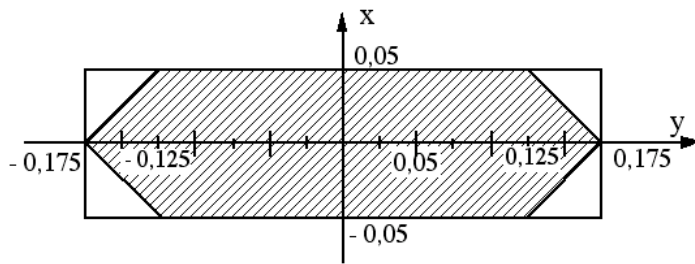


Le domaine est défini par les trois relations :

$$-0,05 \leq x \leq 0,05$$

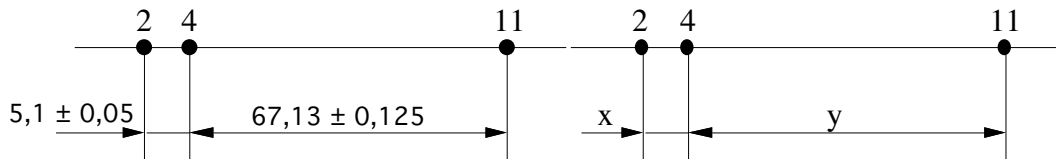
$$-0,175 \leq y \leq 0,175$$

$$-0,175 \leq x+y \leq 0,175$$



Cas où l'on ne vérifie que les deux écarts x , y

La somme des intervalles de tolérance des deux cotes $C_{2,4}$ et $C_{4,11}$ doit être égale à l'intervalle de tolérance de la cote $C_{2,11}$. On choisit ici de réduire l'intervalle de tolérance de la cote $C_{4,11}$ à la valeur de $\pm 0,025$.



Le domaine est défini par les deux relations :

$$-0,05 \leq x \leq 0,05$$

$$-0,125 \leq y \leq 0,125$$

On constate que c'est dans le premier cas, que le domaine de pièces déclarées bonnes est le plus grand et par suite le moins coûteux.

4.4 MODELE STATISTIQUE D'UNE COTE FABRIQUEE : DEFINITIONS

Ces définitions sont issues du groupe de travail WG13 de l'ISO. Elles permettent de prendre en compte la variation statistique des valeurs réelles d'une caractéristique par rapport à une valeur cible.

4.4.1 Indices de capabilité :

On note respectivement :

U et L les limites supérieures et inférieures de la zone de tolérance d'une caractéristique Y_k , μ_{Yk} la moyenne et σ_{Yk} l'écart type de la loi de probabilité de la population des valeurs de la caractéristique fabriquée,

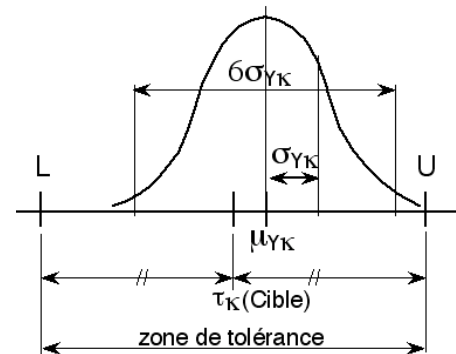
τ_k la spécification cible visée avec $\tau_k = \frac{U - L}{2}$

On définit :

- **L'indice de capabilité C_p** $C_p = \frac{U - L}{6\sigma_{Yk}}$ (a)

L'intervalle 6σ représente pour une loi normale centrée un risque de 2,8% pour qu'une caractéristique Y_k soit en dehors de l'intervalle (§1.4.5)

C_p exprime donc la répartition de la population autour de sa moyenne μ_{Yk} .



- **L'indice de capabilité C_c** $C_c = \max(C_{cl}, C_{cu})$

avec $C_{cl} = \frac{\tau_k - \mu_{Yk}}{\tau_k - L}$ et $C_{cu} = \frac{\mu_{Yk} - \tau_k}{U - \tau_k}$ (b)

C_c exprime la position de la moyenne de la population par rapport à la cible

- **L'indice de capabilité C_{pk}** $C_{pk} = \min(C_{pl}, C_{pu})$

avec $C_{pl} = \frac{\mu_{Yk} - L}{3\sigma_{Yk}}$ et $C_{pu} = \frac{U - \mu_{Yk}}{3\sigma_{Yk}}$ (c)

C_{pk} exprime la position et la répartition de la population

- **L'indice de capabilité C_{pm}** $C_{pm} = \frac{U - L}{6\left\{\sigma_{Yk}^2 + (\mu_{Yk} - \tau_k)^2\right\}^{1/2}}$

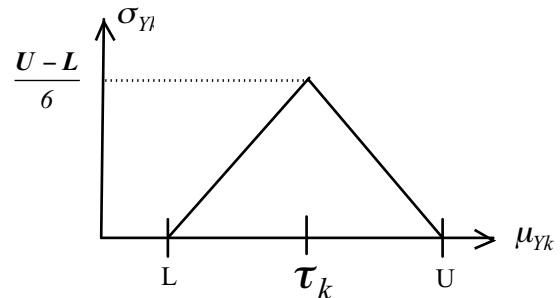
C_{pm} est l'indice de déviation de la racine carrée de l'écart entre la moyenne μ_{Yk} et la valeur cible τ_k . Cet indice est issu de la fonction perte de Tagushi.

4.4.2 Zones de tolérance statistique

En utilisant les indices de capabilité, un processus est statistiquement maîtrisé lorsque l'on spécifie les valeurs minimales de C_p , C_{pk} , C_{pm} et la valeur maximale de C_c .

4.4.2.1 Zone de tolérance statistique à 6σ

Une zone de tolérance statistique peut-être visualisée dans un plan μ_{Yk} σ_{Yk} . Sans indice de capabilité, cette zone a la forme d'un triangle isocèle centré sur la valeur cible τ_k qui elle-même est centrée sur l'intervalle défini par les deux bornes L et U de la caractéristique Y_k .



Si on fait l'hypothèse que la répartition statistique de la population suit une loi normale. En prenant un risque α de 2,8%,

la valeur de l'intervalle estimée de la population est de $6\sigma_{Yk}$. On en déduit immédiatement que la valeur de l'écart-type σ_{Yk} sera maximale lorsque la valeur de la moyenne μ_{Yk} de la population sera centrée sur l'intervalle (L, U), soit $\sigma_{Yk} \max i = (U - L) / 6$ lorsque $\mu_{Yk} = \tau_k$.

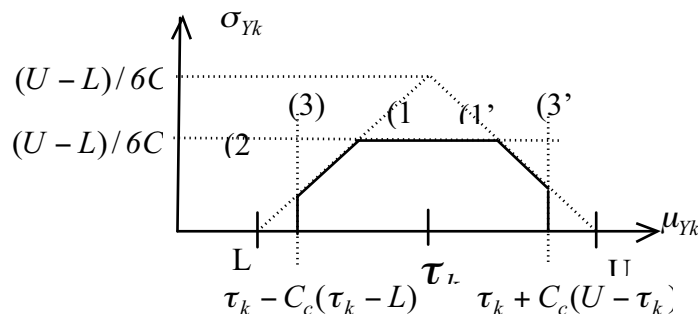
Si la valeur de la moyenne μ_{Yk} de la population tend vers la valeur de l'une des bornes L ou M, pour un même risque α de 2,8%, on fait l'hypothèse que la valeur de l'écart-type σ_{Yk} décroît linéairement pour atteindre la valeur théorique zéro aux bornes.

4.4.2.2 Influence des indices de capabilité sur les limites de la zone de tolérance statistique.

La valeur de l'indice C_{pk} (c'est-à-dire la valeur minimale de C_{pl} ou C_{pu}) limite la variation de la valeur de σ_{Yk} en fonction de la valeur de la moyenne μ_{Yk} . La zone de tolérance statistique est limitée par les deux droites (1) et (1') qui correspondent aux deux inéquations $\sigma_{Yk} \leq \frac{\mu_{Yk} - L}{3C_{pl}}$ et $\sigma_{Yk} \leq \frac{U - \mu_{Yk}}{3C_{pu}}$ déduites des relations (c) §4.4.1

La valeur de l'indice C_p limite la valeur maximale de l'écart type σ_{Yk} . La zone de tolérance statistique est limitée par une droite (2) qui correspond à l'inéquation $\sigma_{Yk} \leq (U - L) / (6C_p)$ déduite de la relation (a) §4.4.1

La valeur de l'indice C_c (c'est-à-dire la valeur maximale de C_{cl} , C_{cu}) limite la valeur prise par la moyenne μ_{Yk} . La zone de tolérance statistique est limitée par la droite (3) $\mu_{Yk} \geq \tau_k - C_c(\tau_k - L)$ et la droite (3') $\mu_{Yk} \leq \tau_k + C_c(U - \tau_k)$ déduites des relations (b) §4.4.1.



Bibliographie

P. BOURDET

" Chaines de cotes de fabrication (Méthode des delta 1): première partie Modèles ",
L'Ingénieur et le Technicien de l'Enseignement Technique. Décembre 1973.

P. BOURDET

Chaines de cotes de fabrication (Méthode des delta 1): deuxième partie Mode
opérateur » L'Ingénieur et le Technicien de l'Enseignement Technique. Mai 1975.

P. BOURDET

Optimisation des méthodes de cotation et de tolérancement en fabrication mécanique.
Journée du GAMI, Paris 30 mai 1975

P. BOURDET

Choix et optimisation des cotes de réglage, 3ème journées scientifique et techniques de
la production automatisée juin 81 (Mécanique Matériaux Electricité N° 388 - Avril
1982).

D. FAINGUELERNT, R. WEILL, P. BOURDET

Computer aided tolerancing and dimensionning in process planning, Annals of the CIRP
, Vol. 35, Manufacturing Technology, Janv.1986

P. BOURDET, J. REMY-VINCENT, F. SCHNEIDER

Tolerance analysis in manufacturing, CIRP International Working Seminar on
Computer-aided Tolerancing - PENNSTATE UNIVERSITY, 16-17 Mai 1991

F. VILLENEUVE, O. LEGOFF, P. BOURDET

Three dimensional geometrical tolerancing in process planning, 32nd CIRP International
seminar on Manufacturing Systems, Leuven(Belgium), pp. 469-478, May 1999

ISO 406 (1987) – NFISO 406 (1995)

Spécification géométrique des produits (GPS) AFNOR pages 217-224