

CHAPITRE VI

VI - IDENTIFICATION TRIDIMENSIONNELLE D'UNE PIECE MECANIQUE

Les procédés d'obtention d'une pièce mécanique sont tels que les surfaces réelles qui la composent ne peuvent être superposables à un modèle géométrique idéal. On est donc amené à admettre des écarts de positions entre les surfaces.

On montre [BOU.73] que le nombre de spécifications strictement géométriques liant un ensemble de surfaces géométriques est très important. Par exemple il existe $n(n-1)/2$ dimensions entre n points situés sur une droite. Aussi on limite le nombre de spécifications en ne considérant que celles garantissant les conditions correctes de fonctionnement et d'interchangeabilité du produit [NF.84]. D'autre part la géométrie stricte est insuffisante pour exprimer correctement des conditions de fonctionnement, aussi la normalisation a défini un symbolisme de tolérancement géométrique particulier [NF.83] capable d'exprimer le caractère fonctionnel de la pièce indépendamment de l'emploi d'un procédé particulier de fabrication de mesurage ou de vérification.

Il est donc nécessaire d'étudier dans le cas d'une mesure tridimensionnelle d'une pièce mécanique les méthodes d'identification des spécifications strictement géométriques et de proposer grâce au modèle général décrit précédemment de nouvelles possibilités d'identification et par suite de vérifications directes des spécifications fonctionnelles d'une pièce mécanique.

On observe que les surfaces géométriques idéales associées sont toutes modélisées par une combinaison des trois éléments géométriques de base : le point, la droite et le plan.

Afin de satisfaire les spécifications du dessin de définition [MIT.82] on est amené à construire à partir des éléments géométriques déjà connus, de nouveaux éléments géométriques de base. L'annexe G recense différentes constructions permises par les logiciels de mesure. Toutes ces constructions répondent à des définitions géométriques strictes sauf deux d'entre-elles : l'intersection de deux droites et la construction d'un plan (ou d'une droite) symétrique de deux plans (ou de deux droites).

Le point d'intersection de deux droites n'existe que si les droites sont coplanaires (et non parallèles). En métrologie deux droites réelles n'étant jamais coplanaires leur intersection doit faire l'objet d'une interprétation, on choisit alors comme point d'intersection soit le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites, soit le pied de la perpendiculaire commune pris sur la première droite nommée, la longueur de la perpendiculaire commune donne dans ce cas une indication sur la qualité du résultat.

Le plan (ou la droite) symétrique de deux plans parallèles a en géométrie une solution unique. En métrologie les deux plans (droites) mesurés n'étant pas parallèles, le plan (la droite) de symétrie est sujet à interprétation. On choisit dans ce cas soit le plan (droite) bissecteur des deux plans (droites), soit le plan (droite) parallèle au premier plan (droite) nommé et passant par le milieu du segment joignant les deux points : "centre" des deux plans (droites).

6.1 Première approche du problème : approche géométrique.

6.1.1 Relations géométriques entre deux surfaces réelles :

Dans cette approche géométrique, les surfaces réelles sont dans un premier temps modélisées indépendamment les unes des autres par des surfaces géométriques idéales. Seules ces surfaces géométriques idéales sont, dans un deuxième temps, prises en compte, dans l'établissement des relations géométriques entre les surfaces réelles.

Ainsi chaque surface est modélisée par un élément géométrique qui tient compte également par le choix judicieux de sa représentation mathématique, de la zone de palpation de la surface. On peut proposer les représentations suivantes [BOU.79] utilisées dans PROMESUR.

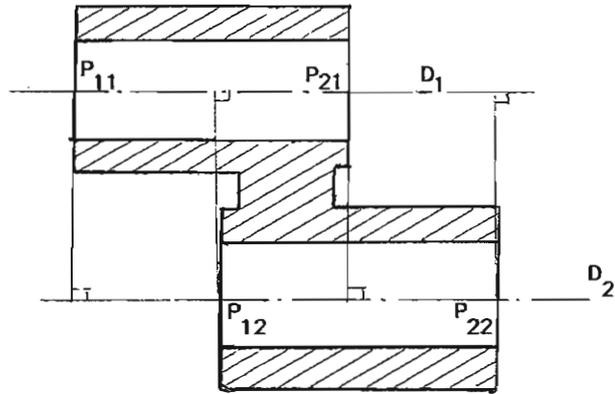
Nature de la surface fabriquée	la surface géométrique idéale associée est définie par :
Une petite surface palpée en un point	un point (centre de la sphère de palpation)
Une droite	une droite donnée par ses deux points extrêmes délimitant la zone de palpation.
Un plan	un point correspondant au centre des points palpés une normale au plan orientée vers l'extérieur de la matière.
Un cercle	le centre du cercle le rayon la normale au plan contenant le cercle.
Une sphère	le centre de la sphère le rayon.
Un cylindre	une droite donnée par les deux points extrêmes de l'axe et délimitant la zone de mesure.
Un cône	une droite donnée par les deux points extrêmes de l'axe et délimitant la zone de mesure, ainsi l'un des points correspond au plan de base. le sommet du cône le 1/2 angle au sommet.

Etablir une relation de position entre deux surfaces géométriques idéales associées revient donc à résoudre le problème du calcul de l'angle et de la distance entre les éléments géométriques de base point, droite et plan pris deux à deux.

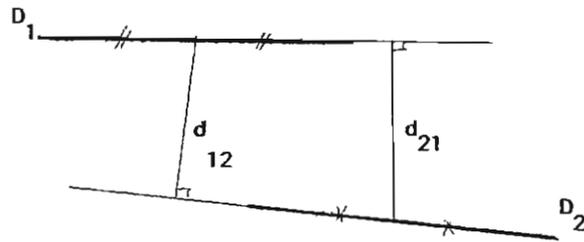
On peut recenser 6 cas types d'association d'éléments géométriques entre eux soit : point-point, point-droite, point-plan, droite-droite, droite-plan et plan-plan. On remarque immédiatement que le calcul des angles ne donne lieu à aucune ambiguïté si ce n'est sur la difficulté d'interprétation des signes des résultats. Le calcul des distances est strictement géométrique et sans ambiguïté dans les trois cas où l'un des éléments géométrique est un point, et dans les cas où les deux droites ne sont pas coplanaires, par contre les cas de distances entre deux droites parallèles, entre une droite et un plan, et entre deux plans ne trouvent pas dans cette approche de solution unique. Le choix d'une solution est laissée au métrologue ou à l'auteur du logiciel de calcul, c'est-à-dire à l'arbitraire. On se propose de recenser les solutions propres à ces différents cas :

6.1.2 Cas de la distance entre deux droites :

Une première solution consiste à construire les points d'intersection des deux droites avec les éléments géométriques limites de la surface, puis de calculer les distances entre chacun des points d'intersection et les droites D_j opposées. Le métrologue interprète ensuite les résultats.



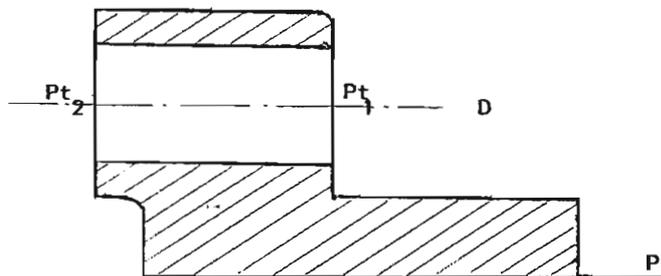
La deuxième solution revient à calculer la distance entre le point milieu d'une des deux droites à l'autre.



6.1.3. Cas d'une droite D et d'un plan P :

On peut citer quatre solutions :

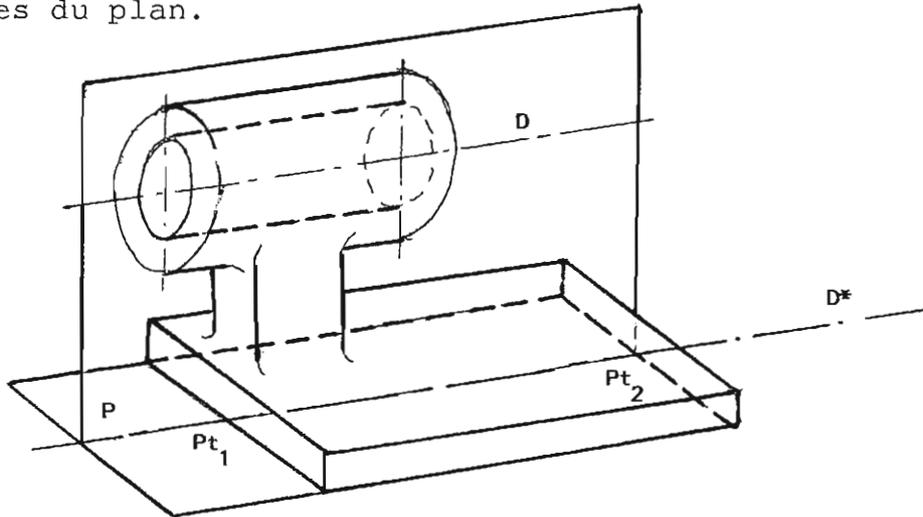
-première solution:



Après avoir construit les deux points Pt_i d'intersection de la droite D avec les surfaces limites on calcule des deux distances des deux points Pt_i au plan P . Le métrologue interprète ensuite les distances trouvées.

deuxième solution :

On construit une droite D^* intersection d'un plan perpendiculaire au plan P et contenant D , puis on détermine les deux points d'intersection Pt_i de la droite D^* et des limites du plan.



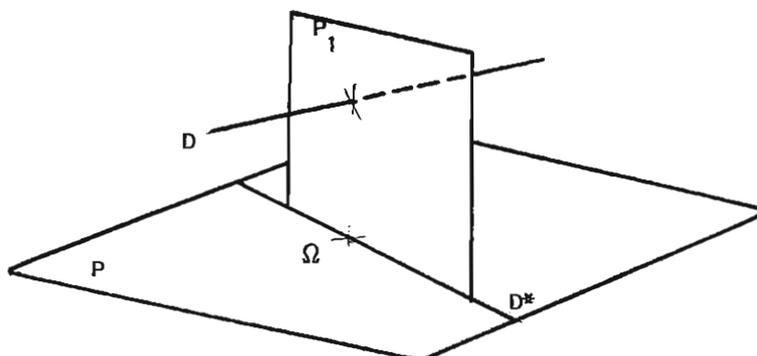
On calcule enfin les deux distances des points Pt_i à la droite D , le métrologue interprète ensuite ses résultats.

troisième solution :

Cette solution consiste à calculer la distance entre le point milieu de la droite D au plan P

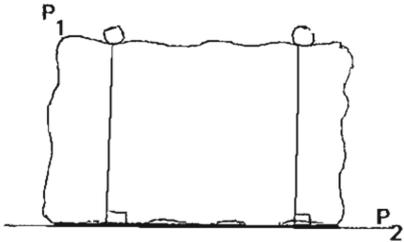
quatrième solution :

Le plan P_1 est construit perpendiculaire à D et contenant le centre du plan P . On construit ensuite la droite D^* intersection des deux plans P_1 et P . Puis on calcule enfin la distance entre les deux droites D et D^* .



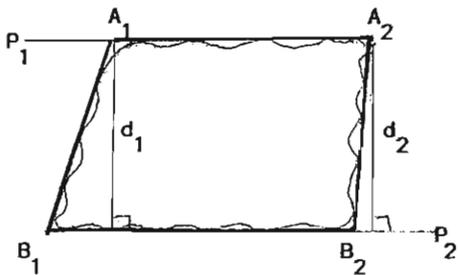
6.1.4 - Cas de deux surfaces planes :

Première solution :



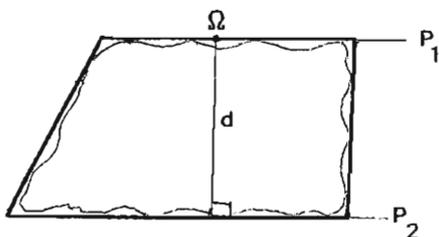
On calcule la distance des différents points de palpation de la surface P_1 à la surface idéale P_2 pris comme référence, et vice-versa. Le métrologue interprète ensuite ses résultats.

Deuxième solution :



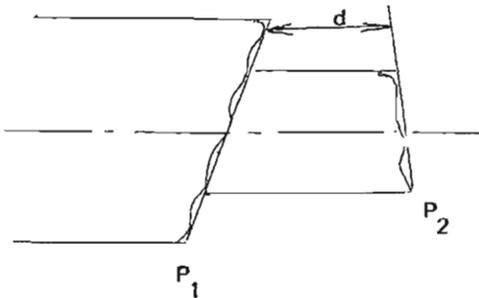
On calcule la distance entre les points anguleux de la surface P_1 et la surface idéale P_2 pris comme référence, et vice-versa. Le métrologue interprète ensuite ses résultats.

Troisième solution :



On calcule la distance entre le milieu de la surface idéale P_1 et la surface idéale P_2 , et vice-versa. Le métrologue interprète ensuite ses résultats.

Quatrième solution :



On calcule les distances entre les points palpés de la surface P_1 et la surface P_2 parallèlement à une direction donnée (par exemple l'axe d'un cylindre).

La liste de ces différentes solutions n'est pas exhaustive, en effet chaque cas de pièce nécessite de la part du métrologue une interprétation des mesures effectuées, celui-ci est donc contraint de créer des solutions géométriques adaptées aux cas de formes géométriques et de spécifications normalisées rencontrées.

La difficulté du problème posé réside dans le fait que les spécifications normalisées répondent à un critère de fonctionnement ou d'interchangeabilité de la pièce [NF.84] et non pas à une définition strictement géométrique des surfaces, pour cela il suffit de citer les spécifications de défaut de perpendicularité, de défaut de position soumis au critère de maximum de matière, etc..., le métrologue est donc contraint dans cette première approche de mesurer ou de vérifier une pièce en n'utilisant que le calcul strictement géométrique de la distance et de l'angle.

On peut néanmoins apporter une solution théorique au problème de la définition des paramètres géométriques nécessaires et suffisants à positionner deux éléments géométriques l'un par rapport à l'autre [BOU.79].

6.2 Proposition de définition des paramètres géométriques de position entre deux surfaces géométriques idéales associées à deux surfaces réelles.

Cette méthode générale de définition des paramètres de position d'un élément géométrique par rapport à un autre utilise la notion de torseurs de petits déplacements (ou torseurs d'écart).

Nous avons vu précédemment que la position de chaque surface géométrique idéale associée peut être caractérisée par un élément géométrique nominal et un torseur d'écart.

Méthode proposée :

Après avoir défini les torseurs d'écart propres à la nature des deux éléments géométriques nominaux, on leur choisit un référentiel commun tel, que son choix entraîne un maximum d'écart nuls sur les torseurs, tout en privilégiant par convention le premier élément géométrique nommé.

A chaque écart non nul correspond un écart géométrique de position ainsi qu'une dimension ou un angle entre les éléments géométriques nominaux.

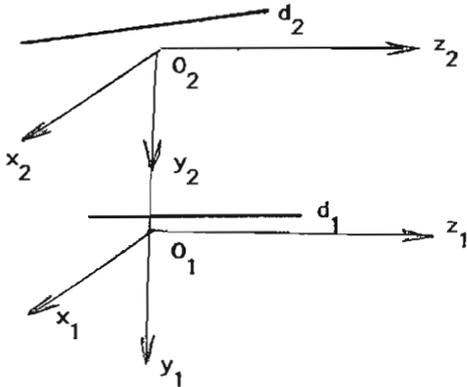
6.2.1 Paramètres géométriques entre une droite 1 et une droite 2 modélisées en deux droites parallèles.

Modèle géométrique idéal nominal :

Les deux droites nominales z_1 et z_2 sont parallèles à une distance l_0 ($O_1O_2 = l_0$).

Le référentiel lié aux deux droites modèles est défini par les deux systèmes d'axes $O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$ et $O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$, le vecteur $\vec{O_1O_2}$ est confondu avec les axes \vec{y}_1 et \vec{y}_2 .

Les deux droites associées n'étant pas confondues avec les deux droites nominales z_1 et z_2 leurs positions peuvent être caractérisées par deux torseurs d'écart.



$$[\mathcal{T}]_1 \begin{cases} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{cases} \quad [\mathcal{T}]_2 \begin{cases} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux droites parallèles:

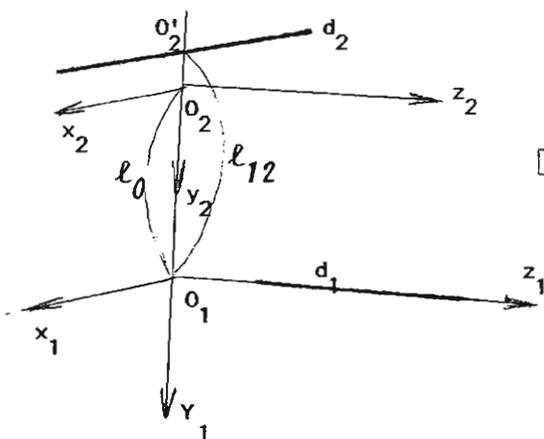
Le référentiel lié aux deux droites modèles est choisi tel que le maximum d'écart des deux torseurs (\mathcal{T}_1) et (\mathcal{T}_2) soient nuls en privilégiant le premier élément géométrique :

l'axe \vec{z}_1 est choisi confondu avec la droite associée d_1 soit : $\alpha_1 = \beta_1 = u_1 = v_1 = 0$

O_1 est la projection sur \vec{z}_1 du milieu O'_2 de la droite d_2 .

le point O_2 est choisi sur la droite $O_1O'_2$ soit $u_2 = 0$

le repère est alors entièrement défini, il reste 3 écarts non nuls α_2 , β_2 et v_2 .



$$[\mathcal{T}]_1 \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ 0 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ 0 \end{cases} \quad [\mathcal{T}]_2 \begin{cases} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 \\ 0 \end{cases}$$

Les 3 écarts non nuls v_2 , α_2 , β_2 correspondent à trois écarts géométriques de position ainsi qu'à la distance nominale l_0 et aux deux angles nominaux autour des 2 axes \vec{x}_2 et \vec{y}_2 .

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

- une distance $l_{12} = l_0 + v_2$
- deux angles $0 + \alpha_2$
 $0 + \beta_2$

6.2.2 Paramètres géométriques entre une droite d_2 et une droite d_1 .

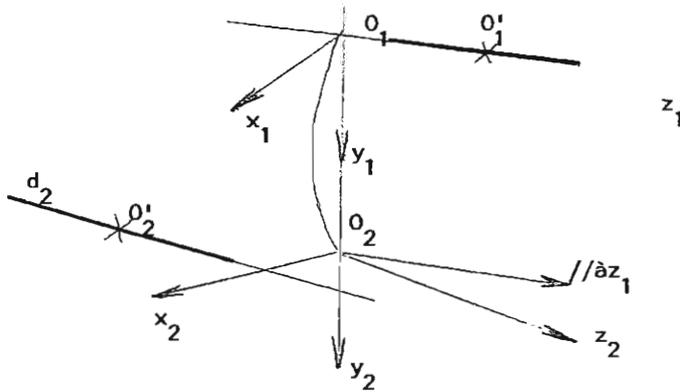
On procède de la même façon que précédemment avec la droite d_2 prise comme référence privilégiée.

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

- une distance $l_{21} = l_0 + v_1$
- deux angles $0 + \alpha_1$
 $0 + \beta_1$

On remarque que les distances l_{21} et l_{12} entre deux mêmes droites sont différentes.

6.2.3 Paramètres géométriques entre deux droites quelconques faisant un angle θ .



$$[\tilde{\zeta}_1] \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ O_1 \end{cases}$$

$$[\tilde{\zeta}_2] \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ O_2 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ O_2 \end{cases}$$

Modèle géométrique idéal nominal :

Deux droites nominales z_1 et z_2 distantes de l_0 suivant la perpendiculaire communes, faisant entre-elles un angle θ .

* Choix du référentiel commun aux deux droites

z_1 confondu avec la droite associée ($\alpha_1 = \beta_1 = 0$
 $u_1 = v_1 = 0$)

$O_1 O_2 = l_0$ sur la perpendiculaire commune aux deux droites
 d_1 et d_2 ($\alpha_2 = u_2 = 0$)

O_1 sur d_1 .

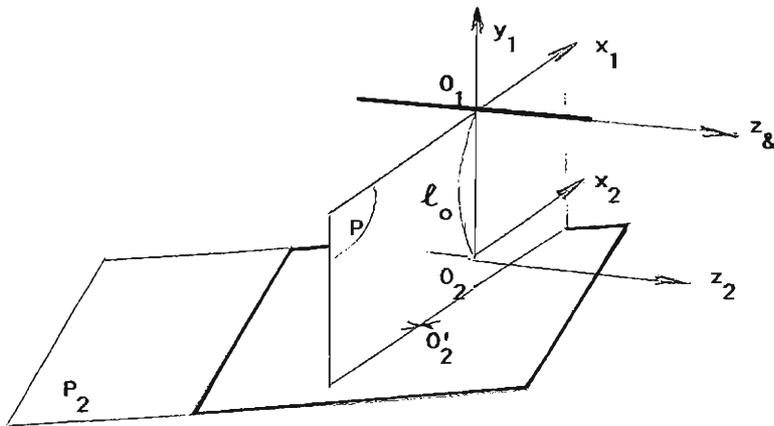
* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

la distance $l_{12} = l_0 + v_2$

l'angle des deux droites suivant \vec{z}^* : $\theta + \beta_2$.

Remarque : la distance l_{12} est égale à la distance l_{21} .

6.2.4 Paramètres géométriques entre une droite 1, un plan 2 à une distance l_0



$$[\tilde{\tau}]_1 \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ O_1 \end{cases}$$

$$[\tilde{\tau}]_2 \begin{cases} \alpha_2 \\ O_2 \\ \gamma_2 = 0 \\ O_2 \\ v_2 \\ O_2 \end{cases}$$

* Modèle géométrique idéal nominal

Une droite nominale \vec{z}_1 parallèle et à une distance l_0 d'un plan nominal \vec{x}_2, \vec{z}_2 .

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

axe \vec{z}_1 confondu avec la droite associée

$$d_1 (\alpha_1 = \beta_1 = u_1 = v_1 = 0)$$

les axes \vec{x}_1 et \vec{x}_2 sont parallèles à l'intersection du plan P_2 et du plan P passant par O'_2 et perpendiculaire à

$$d_1 (\gamma_2 = 0)$$

O_1 est l'intersection de P et de d_1

O_2 est sur la droite $(O_1 O_2) \perp$ à P_2

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

La distance entre la droite 1 et le plan P_2 :

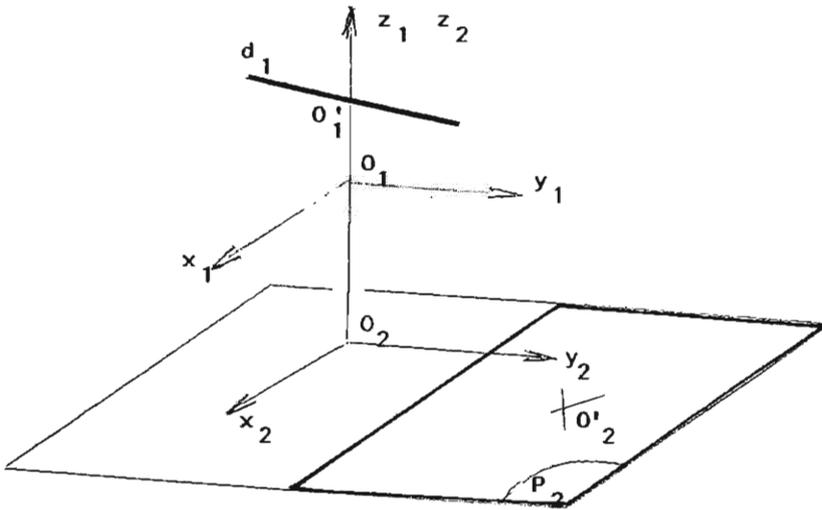
$$l_{12} = l_0 + v_2$$

un angle autour de \vec{x} : $0 + \alpha_2$.

6.2.5 Paramètres géométriques entre un plan 2 et une droite 1 parallèles et à une distance nominale l_0

* Modèle géométrique idéal nominal

Une droite nominale \vec{y}_1 parallèle et à une distance l_0 d'un plan nominal $\vec{x}_2\vec{y}_2$.



* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

O_2 projection du milieu O'_1 de d_1 sur P_2
 $\vec{z}_1 \perp$ à P_2 ; $O_2O_1 = l_0$
 \vec{x}_2 et $\vec{x}_1 \perp$ à (\vec{d}_1, \vec{z}_1) ($\gamma_1 = 0$).

* De la même façon qu'au paragraphe 624 la métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

la distance entre le plan 2 et la droite 1 :

$$l_{21} = l_0 + w_1$$

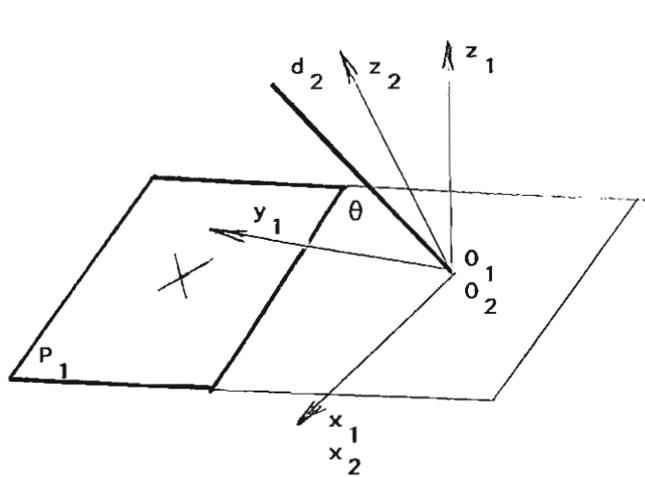
un angle d'axe \vec{x}_1 : $0 + \alpha_1$

On remarque que $l_{12} \neq l_{21}$. (du paragraphe 624).

6.2.6 Paramètres géométriques entre un plan 1 et une droite 2 inclinée d'un angle θ .

* Modèle géométrique idéal nominal

1 plan $P_1(x_1y_1)$ et une droite (z_2) faisant un angle θ



$$[\tilde{\gamma}_1] \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 \\ 0 \\ 0 \\ w_1 = 0 \end{cases} \quad [\tilde{\gamma}_2] \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ O_2 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ 0 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

P plan passant par la droite associée d_2 et perpendiculaire à P_1

O_1 intersection de d_2 et de P_1 ($u_2=v_2=w_1=0$)

y_1 intersection de P_1 et de P ($\alpha_1=\beta_1=0$)

$z_1 \perp$ à P_1

O_1 et O_2 ; x_1 et x_2 sont confondus ($\beta_2=0$.)

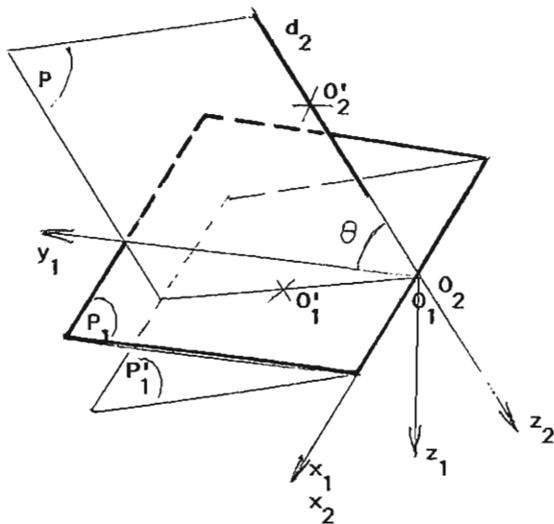
* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

$$\text{l'angle } \theta_{12} = \theta + \alpha_2.$$

6.2.7 Paramètres géométriques entre une droite 2 et un plan 1 inclinés d'un angle θ :

* Modèle géométrique idéal nominal

Une droite nominale (\vec{z}_2) et un plan nominal (\vec{x}_1, \vec{y}_1) faisant un angle θ .



$$[\tilde{\gamma}_1] \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 = 0 \\ O = 0 \\ O = 0 \\ w_1 = 0 \end{cases}$$

$$[\tilde{\gamma}_2] \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ O_2 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ O_2 = 0 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

L'axe \vec{z}_2 est confondu avec la droite associée d_2 :

$$\alpha_2 = \beta_2 = u_2 = v_2 = 0$$

P plan passant par d_2 et perpendiculaire à P'_1

\vec{x}_2 et \vec{x}_1 confondu ($P_1 \cap P'_2$)

O_2 et O_1 confondus : intersection de d_2 et de P'_1
 $(\vec{z}_2, \vec{y}_1) = \theta$.

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

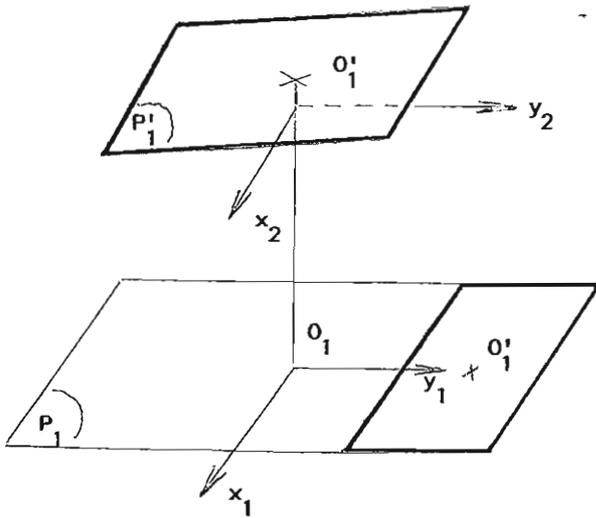
$$\text{l'angle } \theta_{21} = \theta + \alpha_1.$$

On remarque que $\theta_{12} = \theta_{21}$.

6.2.8 Paramètres géométriques entre plan 1 et plan 2 parallèles à la distance l_0 :

* Modèle géométrique idéal nominal

2 plans (\vec{x}_1, \vec{y}_1) et (\vec{x}_2, \vec{y}_2) parallèles distants de l_0 .



$$\begin{cases} [\tilde{\zeta}_1] \\ \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\tilde{\zeta}_2] \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_2 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

O_1 projection de O'_2 sur P_1 $w_1 = 0$
 \vec{x}_1 et \vec{y}_1 choisis arbitrairement dans P_1 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$
 \vec{x}_2, \vec{y}_2 respectivement parallèles à \vec{x}_1 et \vec{y}_1
 O_2 sur la droite $O'_2 O_1$ avec $O_2 O_1 = l_0$.

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

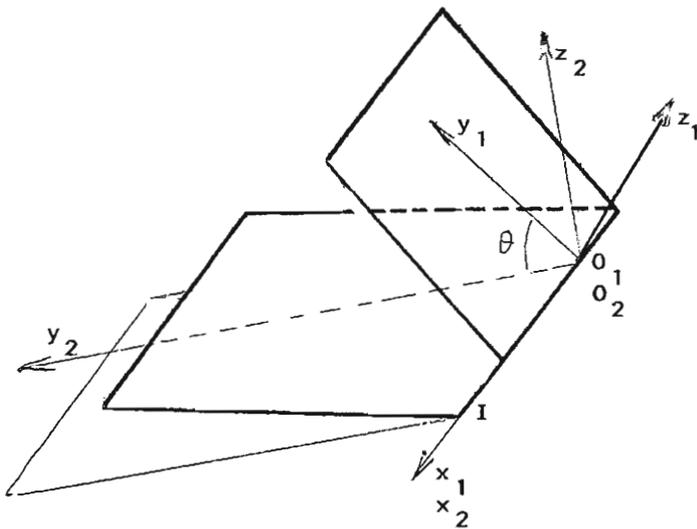
la distance entre le plan 1 et le plan 2 : $l_0 + w_2 = l_{12}$
 l'angle d'axe \vec{x}_2 $0 + \alpha_2$
 l'angle d'axe \vec{y}_2 $0 + \beta_2$

Remarque : si l'on cherche les paramètres du plan 2 au plan 1 on procède de la même façon. On constate que la distance l_{21} ainsi trouvée est différente de la distance l_{12} précédente.

6.2.9 Paramètres géométriques entre un plan 1 et un plan 2 inclinés d'un angle θ

*Modèle géométrique idéal nominal

Deux plans $(\vec{x}_1\vec{y}_1)$ et $(\vec{x}_2\vec{y}_2)$ faisant un angle θ .



$$[\tilde{\zeta}_1] \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ \gamma_1 = 0 \\ \delta_1 = 0 \\ \epsilon_1 = 0 \\ \zeta_1 = 0 \\ \eta_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$[\tilde{\zeta}_2] \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \\ \delta_2 = 0 \\ \epsilon_2 = 0 \\ \zeta_2 = 0 \\ \eta_2 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

\vec{x}_1 et \vec{x}_2 sont confondus avec l'intersection I des 2 plans
 ($\beta_1 = \beta_2 = 0$)
 O_1 et O_2 confondus sont choisis sur I : ($w_1 = w_2 = 0$)
 \vec{y}_1 est contenu dans P_1 ($\alpha_1 = 0$)
 (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = θ .

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

l'angle des deux plans $\theta_{12} = \theta + \alpha_2$.

On a $\theta_{12} = \theta_{21}$.

6.3 Deuxième approche du problème : métrologie fonctionnelle.

Cette nouvelle approche ne consiste plus à considérer la pièce comme un assemblage de surfaces géométriques idéales élémentaires entre lesquelles on établit des relations géométriques strictes, mais comme un ensemble de regroupement de surfaces, chaque regroupement répondant globalement et de manière optimale à un critère géométrique fonctionnelle spécifié par un symbolisme. Cette approche permet de se rapprocher de la cotation fonctionnelle et des notions de calibre utilisées depuis toujours en contrôle géométrique classique des pièces mécaniques et permet d'augmenter les tolérances des pièces fabriquées.

Cette nouvelle approche du problème est en quelque sorte une métrologie fonctionnelle de la pièce. Elle s'applique donc à tout regroupement fonctionnel de surfaces sans restriction ni sur leur nombre, ni sur leur orientation relative.

Je me propose d'étudier les mêmes cas de l'approche strictement géométrique ou le calcul des distances entre deux surfaces nécessitait la construction de nouveaux éléments géométriques et une interprétation des résultats par le métrologue.

6.3.1 Distance entre deux plans P_1 et P_2 .

Les deux surfaces réelles sont respectivement connues par les deux ensembles E_1 et E_2 de points palpés.

Le modèle géométrique de distance entre deux plans s'adresse à deux plans parallèles. Aussi la distance entre les deux surfaces sera celle obtenue entre deux plans parallèles tangents du côté libre de la matière et pouvant répondre à l'un des cinq critères d'optimisation suivants:

- critère de Gauss sur l'ensemble des écarts,
- critère de défaut de forme mini sur l'ensemble des écarts,
- critère de plus petite distance entre deux plans parallèles tangents extérieurs.
- critère de plus grande distance entre deux plans parallèles tangents intérieurs,
- critère de défaut de forme mini sur l'un des deux éléments et plus grande ou plus petite distance intérieure ou extérieure.

A chaque critère d'optimisation choisi on remarque:

- que la distance entre deux plans est unique et n'est plus soumise au choix arbitraire du métrologue,
- que les trois derniers critères proposés répondent bien à une fonctionnalité de guidage ou d'assemblage,
- que la construction d'un plan de symétrie de deux plans parallèles se fait sans aucune ambiguïté.

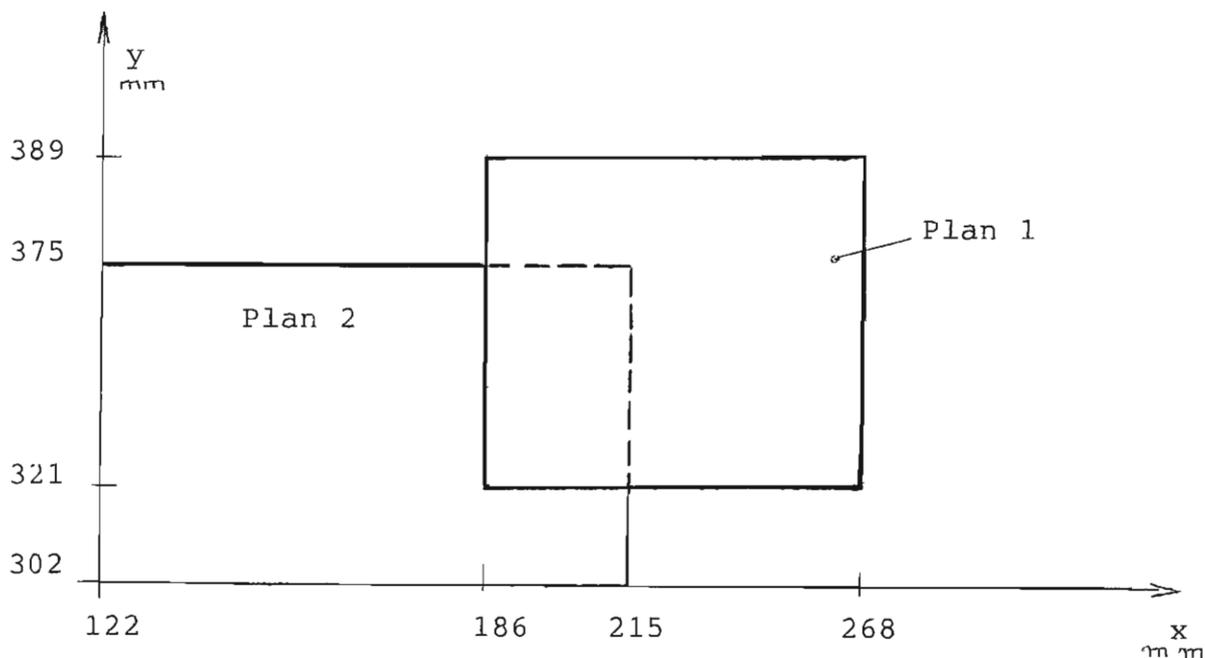
Les mises en équations de l'optimisation suivant les cinq critères sont immédiates, elles sont identiques à celles décrites au chapitre 4 dans le cas du plan. Le torseur des petits déplacements possède trois composantes : une translation w et deux rotations α et β .

Nous donnons un exemple de distance entre deux plans mesurés respectivement en 9 et 30 points.

Pris individuellement les deux plans ont respectivement comme défaut de forme :

Défaut de forme	Critère de Gauss	Critère de défaut mini
Plan 1	0,011	0,010
Plan 2	0,021	0,02

Les coordonnées des points mesurés sont situées dans les enveloppes suivantes :



Les coordonnées des points mesurés sont :

Plan 1 défini par 9 points mesurés					
Point	N°	Abscisse	Coordonnée	cote	Ecart \sum_i
1		268.024	386.542	-437.043	0.00000
2		268.025	357.542	-437.050	0.00700
3		268.025	321.737	-437.051	0.00800
4		223.233	321.737	-437.032	0.01100
5		223.234	357.748	-437.035	0.00800
6		223.238	389.155	-437.026	0.01700
7		186.069	389.156	-437.002	0.04100
8		186.070	355.810	-437.012	0.03100
9		186.070	322.799	-437.015	0.02800

Plan 2 défini par 30 points mesurés				
Point N°	Abscisse	Coordonnée	cote	Ecart ξ_i
1	215.061	375.352	-396.173	0.00000
2	215.061	356.234	-396.222	-0.04900
3	215.062	337.773	-396.269	-0.09600
4	215.063	320.046	-396.315	-0.14200
5	215.063	302.763	-396.356	-0.18300
6	196.554	302.764	-396.355	-0.18200
7	196.555	319.844	-396.319	-0.14600
8	196.554	337.279	-396.273	-0.10000
9	196.554	356.175	-396.212	-0.03900
10	196.554	374.774	-396.157	0.01600
11	176.649	374.775	-396.153	0.02000
12	176.651	356.003	-396.209	-0.03600
13	176.651	337.891	-396.262	-0.08900
14	176.651	319.769	-396.311	-0.13800
15	176.651	302.449	-396.352	-0.17900
16	157.644	302.450	-396.352	-0.17900
17	157.645	319.327	-396.308	-0.13500
18	157.645	338.265	-396.250	-0.07700
19	157.645	355.928	-396.198	-0.02500
20	157.645	373.958	-396.147	0.02600
21	140.116	373.958	-396.140	0.03300
22	140.117	355.831	-396.201	-0.02800
23	140.117	338.131	-396.253	-0.08000
24	140.117	319.368	-396.305	-0.13200
25	140.117	302.733	-396.350	-0.17700
26	122.061	302.734	-396.342	-0.16900
27	122.061	319.226	-396.302	-0.12900
28	122.062	337.733	-396.253	-0.08000
29	122.062	355.052	-396.209	-0.03600
30	122.062	373.728	-396.156	0.01700

Résultats obtenus suivant différents critères appliqués globalement aux deux plans :

Critère de GAUSS

écart de forme obtenu :

- sur l'ensemble des 2 plans : 0,140
- sur le plan 1 : 0,140
- sur le plan 2 : 0,061.

Distance moyenne..... : 40,796
Distance mini extérieure : 40,896
Distance maxi intérieure : 40,695.

Critère distance maxi intérieure :

écart de forme obtenu

- sur l'ensemble des deux plans : 0,175
- sur le plan 1 : 0,175
- sur le plan 2 : 0,024.

Distance maxi intérieure : 40,706.

Critère distance mini extérieure :

écart de forme obtenu

- sur l'ensemble des deux plans : 0,211
- sur le plan 1 : 0,024
- sur le plan 2 : 0,211.

Distance mini extérieure : 40,856.

Critère défaut de forme mini :

écart de forme obtenu :

- sur l'ensemble des deux plans : 0,167
- sur le plan 1 : 0,167
- sur le plan 2 : 0,091.

Distance moyenne: 40,798
Distance mini extérieure : 40,897
Distance maxi intérieure : 40,700.

Critère défaut de forme mini sur plan 1

écart de forme :

- sur le plan 1 : 0,011
- sur le plan 2

Distance moyenne:
Distance mini extérieure :
Distance maxi intérieure :

Critère défaut de forme mini sur plan 2 :

écart de forme :

- sur le plan 1 : 0,010
- sur le plan 2 :

Distance moyenne.....:

Distance mini extérieure :

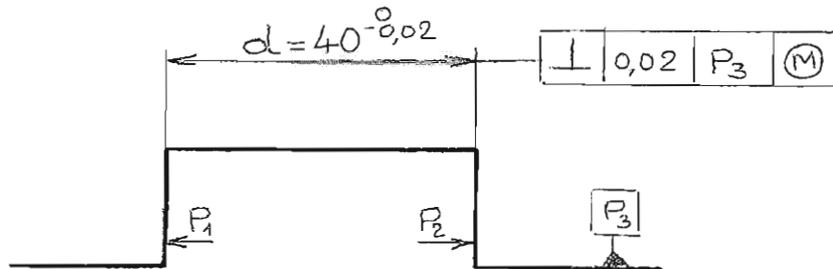
Distance maxi intérieure :

On remarque que chaque résultat donne bien une seule distance, en effet le modèle géométrique, nominal choisi est ici deux plans parallèles. Le critère d'optimisation peut également tenir compte de la fonction de la pièce dans son mécanisme, ainsi les deux critères distance maxi intérieure et distance mini extérieure correspondent à la fonction de guidage d'une pièce femelle et d'une pièce mâle. Le critère défaut de forme mini sur l'un des plans correspond à l'assemblage de deux pièces avec liaison complète sur le plan considéré. Quant au critère de Gauss ou de défaut de forme mini sur l'ensemble des deux plans, celui-ci n'a pas de fonctionnalité directe, il donne une solution globale correspondant à la mesure d'une surface constituée de deux plans.

Cette notion de métrologie fonctionnelle étendue à plus de deux surfaces permet également de résoudre les problèmes posés par les indications fonctionnelles de maximum de matière.

6.3.2 Métrologie fonctionnelle de 3 surfaces planes

A titre d'exemple traitons le cas d'un regroupement de 3 surfaces : distance entre deux plans parallèles P_1 et P_2 perpendiculaires à un troisième plan spécifié P_3 et "cotés au maximum de matière" par une tolérance de perpendicularité.



On suit la procédure suivante :

- a) - Les surfaces P_1 , P_2 et P_3 sont dans un premier temps modélisées par des plans optimisés indépendemment les uns des autres suivant :
 - le critère de GAUSS pour obtenir les écarts types de la distribution des écarts de forme et vérifier d'éventuels aléas de mesure.
 - Le critère défaut de forme mini pour définir le défaut de forme et une première modélisation de chaque surface par des plans tangents du côté libre de la matière.
- b) - Les deux surfaces P_1 et P_2 sont optimisées par deux plans parallèles suivant le critère distance mini extérieure. On obtient ainsi la distance d_{12} .

c) - Les deux surfaces P_1 et P_2 sont de nouveau optimisées par deux plans parallèles mais restant perpendiculaires au plan idéal associé à la surface P_3 , suivant le critère distance mini extérieure.

Pour cela on utilise les mêmes équations qu'en b en supprimant la rotation autour de l'axe parallèle à l'intersection des plans nominaux P_1 et P_3 .

On obtient ainsi une nouvelle distance d_{12}^* .

L'écart de perpendicularité est $|d_{12}^* - d_{12}|$.

La vérification de l'ensemble de la cotation au maximum de matière se traduit par :

$$40 \leq d_{12} \leq 39,98$$

et $d_{12}^* \leq 40,02$.

6.3.3 Distance entre l'axe d'un cylindre (ou d'un cône) et d'un plan P

Les deux surfaces réelles sont connues par deux ensembles de points.

Le modèle géométrique nominal est un cylindre (ou un cône) d'axe parallèle au plan P.

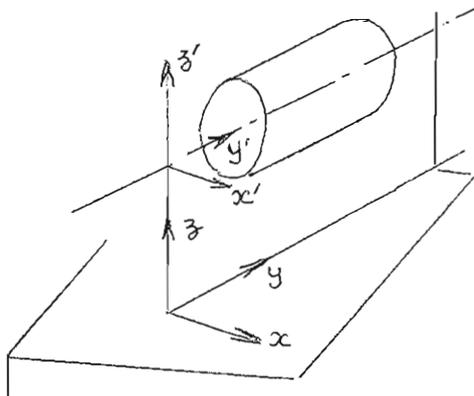
Comme dans le cas précédent la métrologie fonctionnelle permet de calculer la distance suivant l'un des critères :

- Critère des moindres carrés sur l'ensemble des écarts,
- Critère du défaut de forme mini sur l'ensemble des écarts,
- Critère de défaut de forme mini ou des moindres carrés, puis calcul de la distance en optimisant le cylindre suivant l'un des 4 critères :

moindres carrés, défaut de forme mini, plus grand cylindre (ou cône) tangent intérieur, plus petit cylindre (ou cône) tangent extérieur,

- optimisation du cylindre (ou du cône) par l'un des 4 critères : moindres carrés, défaut de forme mini, plus grand ou plus petit cylindre (cône) tangent intérieur ou extérieur puis calcul de la distance optimisée par le critère des moindres carrés ou de défaut de forme mini sur le plan

Les mises en équations se font suivant la méthode générale décrite au chapitre 4. Ainsi on obtient dans le système d'axes décrit ci-dessous les équations suivantes:



OO' distance nominale
Le torseur inconnu caractérisant le petit déplacement est de rang 5

$$[\tilde{L}_{O'}] \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ u \\ 0 \\ w \end{cases} \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{D}_{O'} \end{cases}$$

Cas du critère des moindres carrés sur l'ensemble des deux surfaces.

soit Δd la variation de la distance nominale OO' sur le plan on a :

$$e_i = \xi_i + \Delta d - (\alpha y - \beta x)$$

sur le cylindre

$$e_j = \xi_j (y_j \sin \theta_j - y_j \cos \theta_j + u \cos \theta_j + w \sin \theta_j)$$

Puis on optimise par GAUSS en formant la fonction

$$W = \sum e_i^2 + \sum e_j^2 \text{ et}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial w} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \Delta d} = 0$$

Cas du critère de défaut de forme mini sur l'ensemble des deux surfaces , on obtient :

Pour tout point de mesure du plan

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 + y_i (\alpha_1 - \alpha_2) + x_i (\beta_1 - \beta_2) + w_1 - w_2 - K_i = \xi_i$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 + y_i (\alpha_1 - \alpha_2) + x_i (\beta_1 - \beta_2) + w_1 - w_2 + L_i = \xi_i$$

Pour tout point du cylindre

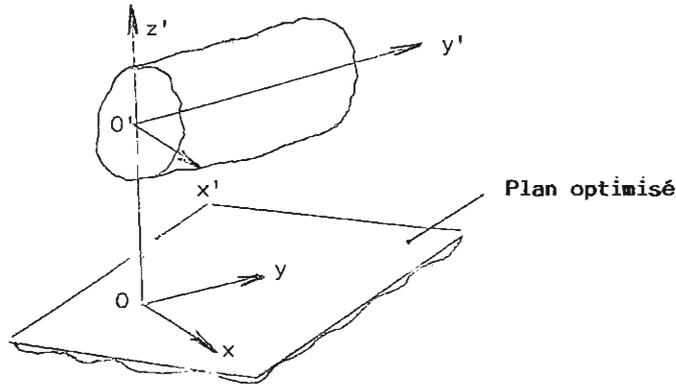
$$\Delta S_1 - \Delta S_2 - y_j \sin \theta_j (\alpha_2 - \alpha_1) + y_j \cos \theta_j (\gamma_1 - \gamma_2) + \cos \theta_j (u_1 - u_2) + \sin \theta_j (v_1 - v_2) - M_j = \xi_j$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 + y_j \sin \theta_j (\alpha_2 - \alpha_1) + y_j \cos \theta_j (\gamma_1 - \gamma_2) + \cos \theta_j (u_1 - u_2) + \sin \theta_j (v_1 - v_2) - N_j = \xi_j$$

Fonction objectif $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2$ minimum.

Cas où l'on privilégie le plan :

- Le plan étant optimisé on lui attache le système d'axe
o \vec{x} \vec{y} \vec{z}



Le torseur de petit déplacement permettant d'optimiser le cylindre se ramène au maximum à 2 composantes $w \vec{z}'$ et $\gamma \vec{z}'$ au lieu des 5 étudiées dans le cas général. En effet, 3 composantes du torseur $\alpha \vec{x}'$ $\beta \vec{y}'$ u \vec{x} sont nulles du fait que l'on oblige l'axe du cylindre à rester parallèle au plan $\vec{x}\vec{y}$.

L'optimisation du cylindre peut alors se faire suivant les quatre critères proposés au chapitre 4.

On remarque que dans le cas des critères plus petit ou plus grand cylindre tangent extérieur ou intérieur en prenant un diamètre nominal égal au diamètre mini de l'alésage ou maxi de l'arbre de la pièce complémentaire et en imposant la translation $w \vec{z}'$ nulle, on vérifie directement la fonction assemblage de la pièce, ou encore une cotation au maximum de matière sur le parallélisme.

Cas où l'on privilégie le cylindre :

- Le cylindre étant optimisé on lui attache le système d'axe $o \vec{x}' \vec{y}' \vec{z}'$.

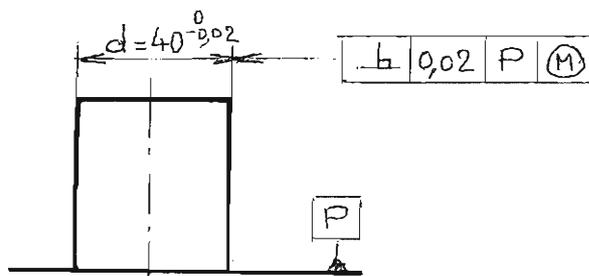
Le torseur de petit déplacement permettant d'optimiser le plan se ramène à une composante $\beta \vec{y}$, les deux autres composantes $w \vec{z}$ et $\alpha \vec{x}$ sont nulles du fait que l'on oblige le plan optimisé à rester parallèle à l'axe du cylindre.

Les mises en équations suivant des différents critères sont identiques à celles décrites au chapitre.4

On peut citer les 4 critères :

- critère de GAUSS,
- critère de défaut de forme mini,
- critère de distance maxi,
- critère de distance mini.

6.3.4 Métrologie fonctionnelle d'un cylindre de diamètre d et perpendiculaire à un plan P coté au maximum de matière.



On suit la procédure suivante :

- le cylindre et le plan sont dans un premier temps modélisés l'un et l'autre suivant le critère de GAUSS afin de vérifier la distribution des écarts de forme et mettre en évidence d'éventuels aléas de mesure.

- b) - le cylindre est modélisé par le plus petit cylindre tangent extérieur de diamètre d .
- c) - le plan est modélisé par le plan P de défaut de forme mini et tangent du côté libre de la matière.
- d) - le cylindre est de nouveau modélisé par le plus petit cylindre tangent extérieur de diamètre d^* et d'axe perpendiculaire au plan P. Ce qui correspond dans l'optimisation à prendre les 2 petites rotations autour des deux axes $\vec{o_x}$ $\vec{o_y}$ du plan P égales à zéro.

La vérification de l'ensemble de la cotation au maximum de matière se traduit par :

$$40 \leq d \leq 39,98$$

et

$$d^* \leq 40,02.$$

L'écart de perpendicularité étant $|d^* - d|$.

6.3.5 Distance entre deux axes de cylindres (ou de cônes) parallèles.

Les deux surfaces réelles sont connues par deux ensembles de points.

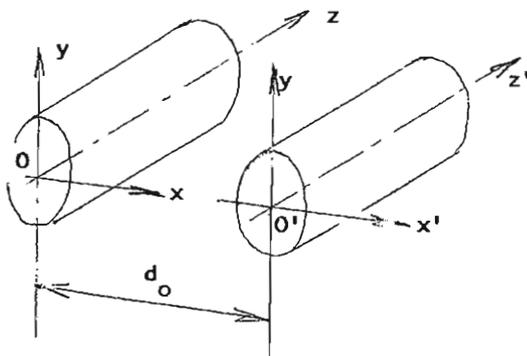
Le modèle géométrique nominal est constitué de deux cylindres (ou de deux cônes) d'axes parallèles distants de la dimension nominale .

La métrologie fonctionnelle permet de calculer la distance suivant l'un des critères :

- Moindres carrés sur l'ensemble des écarts,
- défaut de forme mini sur l'ensemble des écarts,
- optimisation de l'un des deux cylindres (ou cônes) par l'un des quatre critères de base :
 - . moindres carrés,
 - . défaut de forme mini,
 - . plus grand cylindre tangent intérieur,
 - . plus petit cylindre tangent extérieur,

puis optimisation de l'autre cylindre (ou cône) par l'un des quatre critères de base, avec ou sans optimisation de la distance nominale d_0 .

Les mises en équations se font suivant la méthode générale décrite au chapitre 4. On obtient dans le système d'axes (chapitre 5) décrit ci-dessous les équations suivantes :



OO' distance nominale d_0
 Le torseur inconnu caractérisant le petit déplacement est de rang 5

$$[\zeta_0] \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ u \\ v \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \\ \Omega \\ \rightarrow \\ D_0 \end{matrix}$$

Cas du critère des moindres carrés sur l'ensemble des deux surfaces :

Si Δd est la variation de la distance nominale on a :

sur le cylindre (O) :

$$e_i = \xi_i - (-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)$$

sur le cylindre (O') :

$$e'_j = \xi'_j - (-z_j \sin \theta_j \alpha + z_j \cos \theta_j \beta + (u + \Delta d) \cos \theta_j + v \sin \theta_j + d_0 \sin \theta_j \gamma)$$

Puis on optimise par GAUSS en formant la fonction

$$W = \sum e_i^2 + \sum e_j^2$$

et on obtient 6 équations à 6 inconnues :

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \Delta d} = 0$$

Cas du critère de défaut de forme mini sur l'ensemble des deux surfaces :

Pour tout point i du cylindre (O) on a :

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - K_i = \xi_i$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - T_i = \xi_i$$

Pour tout point j du cylindre (O') on a :

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 - z_j \sin \theta_j (\alpha_1 - \alpha_2) + z_j \cos \theta_j (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_j (u_1 - u_2) + \cos \theta_j (\Delta d_1 - \Delta d_2) + \sin \theta_j (v_1 - v_2) + d_0 \sin \theta_j (\gamma_1 - \gamma_2) - K_j = \xi_i.$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 - z_j \sin \theta_j (\alpha_1 - \alpha_2) + z_j \cos \theta_j (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_j (u_1 - u_2) + \cos \theta_j (\Delta d_1 - \Delta d_2) + \sin \theta_j (v_1 - v_2) + d_0 \sin \theta_j (\gamma_1 - \gamma_2) + T_j = \xi_j.$$

Fonction objectif $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2$ minimum.

Cas où l'on privilégie un des cylindres : par exemple le cylindre O.

Le cylindre O étant optimisé par l'un des quatre critères d'optimisation de base, le deuxième cylindre est optimisé par le torseur $\tau_0 \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ 0 \end{array} \right\}$ exprimé dans

un repère $O \vec{x} \vec{y} \vec{z}$ dont l'axe Oz est confondu avec l'axe du cylindre (O) optimisé. On a donc : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $u = 0$, $v = 0$, dans la mise en équation de l'optimisation du deuxième cylindre (O') soit :

Critère de GAUSS :

$$e'_j = \xi'_j - (\Delta d \cdot \cos \theta_j + d_0 \sin \theta_j \gamma)$$

$$\text{et } W' = \sum e'_j{}^2$$

On obtient 2 équations à 2 inconnues :

$$\frac{\partial W'}{\partial \Delta d} = 0 \quad \frac{\partial W'}{\partial \gamma} = 0.$$

Critère du défaut de forme mini :

$$\Delta S'_1 - \Delta S'_2 + \cos \theta_j (\Delta d_1 - \Delta d_2) + d_0 \sin \theta_j (\gamma_2 - \gamma_1) - K_j = \xi_i$$

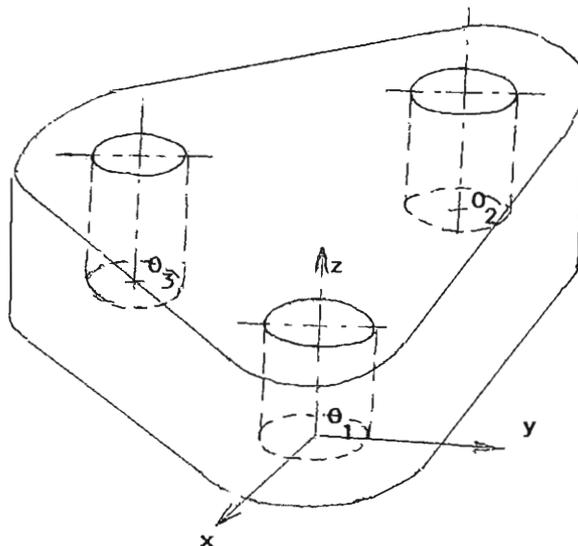
$$\Delta I'_1 - \Delta I'_2 + \cos \theta_j (\Delta d_1 - \Delta d_2) + d_0 \sin \theta_j (\gamma_2 - \gamma_1) + T_j = \xi_i$$

avec $Z' = \Delta S'_1 - \Delta S'_2 - \Delta I'_1 + \Delta I'_2$ minimum.

La mise en équation est immédiate dans les cas des deux critères plus grand cylindre tangent intérieur ou plus petit cylindre tangent extérieur.

6.3.6 Métrologie fonctionnelle de n cylindres (alésages) parallèles avec une condition d'assemblage sur n arbres.

a) Sans condition de perpendicularité avec un plan.



Chaque cylindre (C_1, C_2, \dots, C_n) est connu par un ensemble (E_1, E_2, \dots, E_n) de points mesurés. On suit la procédure suivante :

- a) - On associe dans un premier temps à chaque ensemble (E_k) un cylindre des moindres carrés pour détecter de manière statistique d'éventuels aléas de mesure.
- b) - On modélise ensuite chaque ensemble E_k par le plus grand cylindre tangent intérieur, on définit ainsi les différents diamètres d_k .
- c) - La position nominale des différents cylindres est définie par un modèle théorique correspondant à la position nominale des arbres théoriques. chaque diamètre nominal est égal au diamètre maxi de l'arbre augmenté du jeu fonctionnel.

On optimise alors l'ensemble des alésages en posant sur n-1 cylindres les conditions :

$$e_{ij} \geq 0$$

et sur un cylindre la condition plus grand cylindre tangent intérieur.

Ce qui s'écrit :

Pour le cylindre 1 : plus grand cylindre tangent intérieur.

$$\Delta R - z_{i1} \sin \theta_{i1} (\alpha_1 - \alpha_2) + z_{i1} \cos \theta_{i1} (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_{i1} (u_1 - u_2) + \sin \theta_{i1} (v_1 - v_2) + T_{i1} = \rho_{i1} - R \text{ nominal}_1$$

pour les cylindres k avec $2 < k < n$:

$$-z_{ik} \sin \theta_{ik} (\alpha_1 - \alpha_2) + z_{ik} \cos \theta_{ik} (\beta_j - \beta_2) + \cos \theta_{jk} (u_1 - u_2) + \sin \theta_{jk} (v_1 - v_2) - (\vec{O_k O_1} \cdot \vec{x}) \sin \theta_{ik} - (\vec{O_k O_1} \cdot \vec{y}) \cdot \cos \theta_{ik} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2) + T_{ik} = \rho_{ik} - R \text{ nominal}_k$$

avec comme fonction objectif : $Z = \Delta R$ maximum.

Si l'optimisation par la méthode du simplexe donne une solution, la condition fonctionnelle d'assemblage est respectée.

b) - Avec une condition de perpendicularité au plan P, les axes $O \vec{x}$ et $O \vec{y}$ du repère sont choisis dans le plan P. La mise en équations est alors la même que précédemment avec la simplification des petites rotations et autour des axes $O \vec{x}$ et $O \vec{y}$ que l'on prend égales à zéro.

6.3.7 Conclusions :

Cette méthode générale permet de résoudre au mieux tous les cas de cotation fonctionnelle.

En effet nous avons mis en évidence une cotation géométrique du modèle nominal s'appuyant sur la détermination des écarts géométriques nécessaires et suffisants au positionnement des surfaces géométriques idéales associées par rapport au modèle géométrique nominal. La métrologie fonctionnelle permet d'optimiser les écarts géométriques suivant un ou des critères fonctionnelles d'un groupe de surfaces. Cette nouvelle approche permet de vérifier ou d'identifier directement la fonction de la pièce et, par suite, de répondre directement à la cotation fonctionnelle de la pièce.

Cette approche a été étendue au réglage des montages d'usinage [LER.86] et des machines outils. Pour cela nous avons dans un premier temps mesuré par points soit les surfaces de référence du montage d'usinage, soit les surfaces réalisées par la machine-outil, puis dans un deuxième temps nous avons optimisé l'association des surfaces géométriques idéales nominales aux surfaces mesurées en ne retenant du torseur de petits déplacements que les composantes correspondant aux possibilités de réglage du montage d'usinage ou de la machine-outil. Le critère d'optimisation choisi peut être comme précédemment aussi bien celui du défaut de forme mini, de Gauss, de la surface tangente que celui d'une cotation fonctionnelle de la pièce. On fait donc coïncider au mieux le réglage de la machine-outil ou du montage usinage à la fonctionnalité de la pièce, ce qui a pour conséquence de maximiser les tolérances de réglage.