

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

1.1 Introduction.

La mesure tridimensionnelle a pris une place importante dans les systèmes de production. En effet la rentabilité économique de l'automatisation des moyens de production nécessite un contrôle rigoureux et automatique des spécifications géométriques des pièces produites. Les ateliers intègrent des machines produisant vingt quatre heures sur vingt quatre avec des temps de changement de pièces, d'outils et de production de plus en plus courts. De telles performances ne sont possibles que par des préréglages des portes-pièces et des outils et par une mesure des surfaces réalisées afin d'adapter les trajectoires réelles des outils aux formes et spécifications des pièces désirées.

Le problème général ainsi posé est celui de l'identification géométrique des surfaces réelles d'une pièce fabriquée et des trajectoires réelles d'une machine ou d'un robot. Cette identification a pour objectif d'optimiser les écarts géométriques entre une forme théorique désirée et la forme réellement exécutée, suivant un critère technologique précis. On peut citer les critères :

- optimiser les paramètres de réglage d'un porte pièce.
- optimiser le balançage des surfaces usinées dans un brut admissible.
- optimiser les corrections d'outils et de prise des origines d'une commande numérique.
- corriger les défauts géométriques des trajectoires d'une machine ou d'un robot.

- minimiser le défaut de forme d'une surface.
- vérifier ou mesurer une spécification géométrique ou fonctionnelle d'une pièce mécanique.

Cette liste de critères n'est pas limitative mais elle montre que l'objectif de cette recherche est de déterminer la meilleure identification d'une géométrie, et par suite d'obtenir la meilleure qualité des paramètres nécessaires en mesure tridimensionnelle.

1.2 Contenu et contribution de ce travail :

A première vue il paraît simple de définir une pièce comme un assemblage d'éléments géométriques simples et bien connus comme le point, la droite, le plan, le cercle, le cylindre, etc..., et de considérer la métrologie comme un simple problème de géométrie avec ses calculs d'angles et de distances. Mais une pièce fabriquée est composée de surfaces élémentaires qui ne sont jamais exactement des plans des cercles, etc...

Ainsi dans le cas par exemple d'une surface fabriquée cylindrique, celle-ci est composée d'une infinité de points. Pour un ensemble de cinq points appartenant à la surface, on peut définir un cylindre C passant par ces cinq points et identifier cette surface par ce cylindre C.

Le cylindre C ainsi défini ne passe pas par les autres points de la surface, et pour toute autre combinaison de cinq points appartenant à la surface, on obtient un cylindre différent. Le choix du cylindre représentatif de la surface devient délicat si l'on sait que celui-ci doit , par exemple:

- être d'un diamètre compris entre deux bornes,
- avoir un défaut de forme inférieur à une borne donnée.
- avoir son axe perpendiculaire avec une tolérance à l'axe d'un autre cylindre (qui lui-même est à identifier).

- avoir son axe parallèle, avec une tolérance, à un plan (qui lui-même est à identifier).
- être à deux distance d_1 et d_2 de deux plans, P_1 et P_2 .

L'identification revient à choisir un cylindre C représentatif de cette surface fabriquée cylindrique, satisfaisant de préférence les conditions imposées, et d'en donner les spécifications réelles :

- le diamètre,
- le défaut de forme,
- les défauts de parallélisme et de perpendicularité,
- les deux distances à deux plans.

La position relative de deux surfaces n'est pas non plus un problème purement géométrique, par exemple la détermination des distances de l'axe du cylindre C précédent serait simple à identifier si l'axe était parallèle aux deux plans P_1 et P_2 , ce qui n'est jamais le cas sur une pièce réelle.

D'autre part chaque point mesuré sur une surface est obtenu à l'aide d'une machine à mesurer. Chaque coordonnée des points est acquise par déclenchement d'un palpeur mécanique ou électronique monté en bout d'une chaîne de solides liés entre-eux par des liaisons mécaniques montées en série. Les mesures effectuées sont donc tributaires, entre-autre, de la qualité géométrique des différentes liaisons et de la fidélité du palpeur, en conséquence, les points palpés sont donc mesurés dans un repère curviligne non-orthonormé.

Dans le chapitre II on présente une synthèse des différentes étapes nécessaires à la modélisation d'une surface, dans le chapitre III, on propose une méthode générale

d'identification géométrique d'une surface basée sur l'utilisation du torseur de petits déplacements avec optimisation suivant un critère de GAUSS ou de défaut de forme mini ou de plus grande ou de plus petite surface tangente du côté libre de la matière. Un critère permet ensuite de vérifier la validité de l'hypothèse de petits déplacements. Le chapitre IV se rapporte à une étude détaillée de l'application de la méthode générale à l'identification sur machines à mesurer tridimensionnelles parfaites des surfaces géométriques les plus courantes, c'est-à-dire la droite, le plan, le cercle, la sphère, le cylindre et le cône. Le chapitre V présente une étude comparative des résultats obtenus par les différents critères d'optimisation dans les cas du cercle, du cylindre et du plan, et étudie l'influence d'un point aberrant sur la modélisation d'un cercle et d'un plan par les critères de GAUSS et de défaut mini.

Nous proposons ensuite dans le chapitre VI une étude sur l'identification d'une pièce mécanique. Cette étude est tout d'abord abordée sous l'aspect purement géométrique et montre les difficultés rencontrées dans l'interprétation des spécifications normalisées. On propose ensuite une nouvelle approche du problème en identifiant directement, par optimisation, les spécifications fonctionnelles de la pièce, le modèle général proposé au chapitre III permet ainsi d'effectuer une métrologie fonctionnelle de la pièce.

Enfin dans le chapitre VII nous effectuons une étude complète sur l'identification géométrique d'une machine à mesurer. Le modèle général proposé permet en effet d'identifier les 21 écarts géométriques de la machine et ensuite, d'en effectuer par logiciel une correction. Cette étude a été menée sur une machine à mesurer de type Trusquin.

Nous terminons au chapitre VIII par un bilan du travail réalisé et une conclusion sur l'état de nos réflexions.

CHAPITRE II

II - IDENTIFICATION GEOMETRIQUE D'UNE SURFACE FABRIQUEE

Une pièce mécanique est un assemblage de surfaces élémentaires auxquelles on peut associer des éléments géométriques connus. La cinématique des machines-outils, ainsi que la cinématique des liaisons entre les pièces d'un mécanisme font que dans presque tous les cas, les éléments géométriques utilisés sont : le point, la droite, le plan, le cercle, la sphère, le cylindre et le cône. Dans les autres cas, les éléments géométriques utilisés peuvent toujours être définis par une succession de points et de normales en ces points.

Identifier une pièce mécanique revient à associer à chaque surface fabriquée un élément géométrique connu, à définir les écarts de forme entre surface fabriquée et élément géométrique associé, à caractériser les paramètres de position des éléments géométriques entre-eux [MIT.82] .

Les appareils de mesure actuels utilisés en métrologie ne mesurent avec précision que des distances entre un point palpé et une référence de mesure. Ainsi une surface fabriquée ne peut être connue que par un ensemble de points palpés. Le choix du nombre de points et de leur répartition sur la surface fabriquée est directement lié à la connaissance que l'on désire obtenir de cette surface [NAW.81] ; en général on effectue un compromis entre le temps de mesure, les dimensions de la surface, le défaut de forme, l'accessibilité des points de mesure liée à la cinématique de l'appareil de métrologie, et la précision du résultat désiré.

Dans cette première étude on considère que la qualité de l'instrument de mesure est satisfaisante. On se propose d'étudier les méthodes d'association de surfaces géométriques idéales [NF.83] à un ensemble de points palpés et de proposer ensuite une nouvelle solution mathématique donnant une solution unique au problème posé.

2.1 Rappel sur les méthodes de contrôle traditionnelles de surfaces :

Les méthodes traditionnelles d'association d'une surface géométrique idéale à un ensemble de points palpés varient d'un opérateur à un autre, d'un système de mesure automatique à un autre [SCH.82]. Bien qu'il n'y ait pas unicité dans les résultats, on peut néanmoins dégager les étapes suivantes communes à toutes les méthodes.

1ère Etape :

La surface fabriquée est connue par un ensemble de points palpés : (ces points palpés peuvent être les différents points occupés successivement par le centre de la sphère du palpeur lors du palpé de la surface).

Chaque points palpés est alors défini soit par rapport à une surface géométrique idéale de référence de mesure (surface d'un marbre., axe de rotation d'une broche etc...) soit par 3 coordonnées exprimées dans un repère orthonormé.

2ème Etape : définition de la surface géométrique idéale nominale

Celle-ci est définie par le nombre minimum de points n propre à la définition géométrique stricte de la surface.

Soit : 2 points pour une droite
3 points pour un plan ou un cercle
4 points pour une sphère
5 points pour un cylindre
6 points pour un cône
n points ($n \leq 6$) pour une surface complexe de rang n.

On définit la surface géométrique idéale nominale par n points privilégiés, pris arbitrairement, parmi les points palpés. Le choix se porte le plus souvent sur les points les plus éloignés, ou les points permettant une bonne maîtrise du balançage manuel de la pièce.

On détermine alors les écarts de mesure ξ_i entre les points palpés et la surface géométrique idéale nominale. Les écarts ξ_i sont obtenus soit par calcul, soit par mesure directe de la pièce balancée dans ce cas manuellement.

On définit alors le défaut de forme nominal Df_n de la surface : $Df_n = \sup\{\xi_i\} - \inf\{\xi_i\}$.

Ce défaut de forme est un premier résultat, il dépend du choix judicieux mais non moins arbitraire des n points.

Dans le cas d'un contrôle, si le défaut de forme Df_n ainsi trouvé est inférieur à la tolérance du défaut de forme IT_f imposé par le contrôle, on conclut que la pièce est bonne ; dans le cas contraire ou Df est supérieur à IT_f on ne peut pas affirmer que la pièce soit hors tolérance mais conclure seulement que la pièce n'a pas été trouvée bonne, en effet un autre choix de n points parmi les points palpés correspondant à un autre balançage de la surface donnerait peut-être une pièce bonne.

D'autre part cette procédure de mesure ne permettra jamais d'affirmer que le défaut de forme Df_n ainsi trouvé est minimal [NF.83]

3ème Etape : Définition de la surface géométrique idéale optimisée.

Cette étape ne s'applique que lorsque la métrologie est assistée par un ordinateur, la surface géométrique idéale optimisée sera celle obtenue après un calcul d'optimisation, elle définit la direction générale de la surface.

4ème Etape : Définition de la surface géométrique idéale associée aux points palpés.

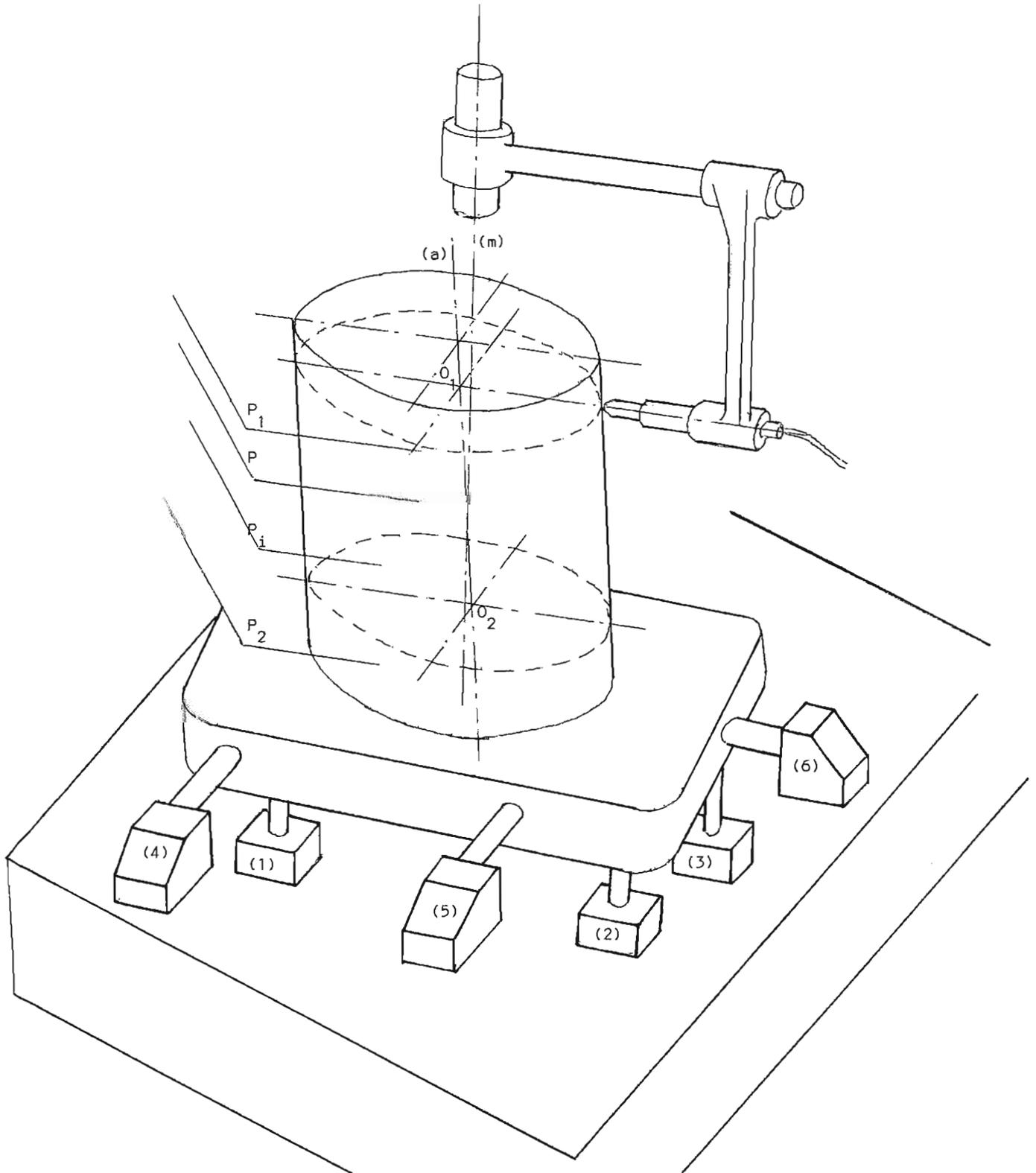
Cette surface est le plus souvent parallèle ou concentrique à la direction générale de la surface définie à l'étape 3 ou 2 et tangente du côté libre de la matière.

2.2 Application au contrôle d'une surface fabriquée cylindrique

L'opérateur dispose d'une broche ou d'un plateau tournant définissant un axe de rotation stable, et d'une direction de mesure perpendiculaire à l'axe mesuré.

La surface fabriquée cylindrique est "balancée" afin que son axe (a) soit confondu avec l'axe de mesure (m). Les trois vérins (1), (2), (3) définissent l'orientation de l'axe (a), les trois vérins (4), (5), (6) font coïncider ensuite par translation les deux axes (a) et (m) le plan d'appui (A1) étant perpendiculaire aux axes.

Cette opération de balançage très longue à mettre en oeuvre est menée le plus souvent, de la manière décrite ci-dessous :



Le cylindre idéal de référence à la mesure est le cylindre d'axe défini par l'axe de rotation (m) de la broche de l'appareil de mesure.

Dans deux plans P_1 et P_2 choisis, les plus éloignés possibles et perpendiculaires à l'axe de mesure on identifie deux cercles de centre O_1 et O_2 que l'on amène par balancement de la pièce sur l'axe de rotation de la broche.

On définit bien ainsi un cylindre idéal nominal passant par les 2 points O_1 et O_2 que l'on fait coïncider avec l'axe de rotation du cylindre idéal de mesure ce qui permet de lire directement dans les différents plans P_j les écarts ξ_i entre la surface fabriquée et le cylindre idéal nominal.

Si l'opérateur en reste là, il identifie la surface fabriquée par le cylindre d'axe $O_1 O_2$.

Le défaut de forme, le rayon et la position de l'axe du cylindre dépendent du choix arbitraire des points définissant les centres O_1 et O_2 .

Pour améliorer le résultat, l'opérateur définit par calcul un cylindre idéal optimisé de la manière suivante:

On effectue des relevés de circularité dans les plans $P_1 P_2 \dots P_n$ perpendiculaires à l'axe de mesure. Par calcul, on cherche les centres $O_1 O_2 \dots O_n$ des cercles associés aux différentes lignes relevées dans les plans. L'axe du cylindre idéal optimisé est alors défini comme étant la droite passant au mieux des n centres $O_1 O_2 \dots O_n$, on calcule ensuite les écarts d_i de forme en cherchant les nouvelles distances des points mesurés à l'axe.

Le cylindre idéal associé est alors défini par le cylindre d'axe, celui du cylindre idéal optimisé mais tangent du côté libre de la matière.

2.3 Conclusion

Quelle que soit la surface, on suit la méthodologie suivante :

La surface fabriquée connue par son ensemble de points palpés

- a) - On lie d'une manière arbitraire, mais qu'on espère objective, une surface géométrique idéale à la surface fabriquée.

- b) - On définit les écarts de forme par l'ensemble des distances entre la surface géométrique idéale associée et les points palpés caractérisant la surface fabriquée. Ces distances sont mesurées sur les normales à la surface géométrique idéale associée. Le défaut de forme est défini par le supérieur moins l'inférieur de l'ensemble des distances.

- c) - La surface fabriquée est alors connue par la surface géométrique idéale associée dont on connaît tous les paramètres dans un repère orthonormé.

On remarque que le résultat de l'identification d'une surface fabriquée est lié à la méthode d'optimisation utilisée. Il apparaît qu'il n'existe pas une méthode exacte permettant pour toute surface fabriquée de donner une solution

unique. La normalisation internationale a prévu ce manque d'unicité en normalisant [NF.83] le défaut de forme mini comme étant le critère de comparaison des résultats obtenus par différentes méthodes ou plusieurs opérateurs.

Nous nous proposons d'étudier et d'expérimenter une méthode générale capable de répondre au problème de l'association d'une surface géométrique idéale à une surface réelle.

CHAPITRE III

III - METHODE GENERALE D'IDENTIFICATION GEOMETRIQUE D'UNE SURFACE :

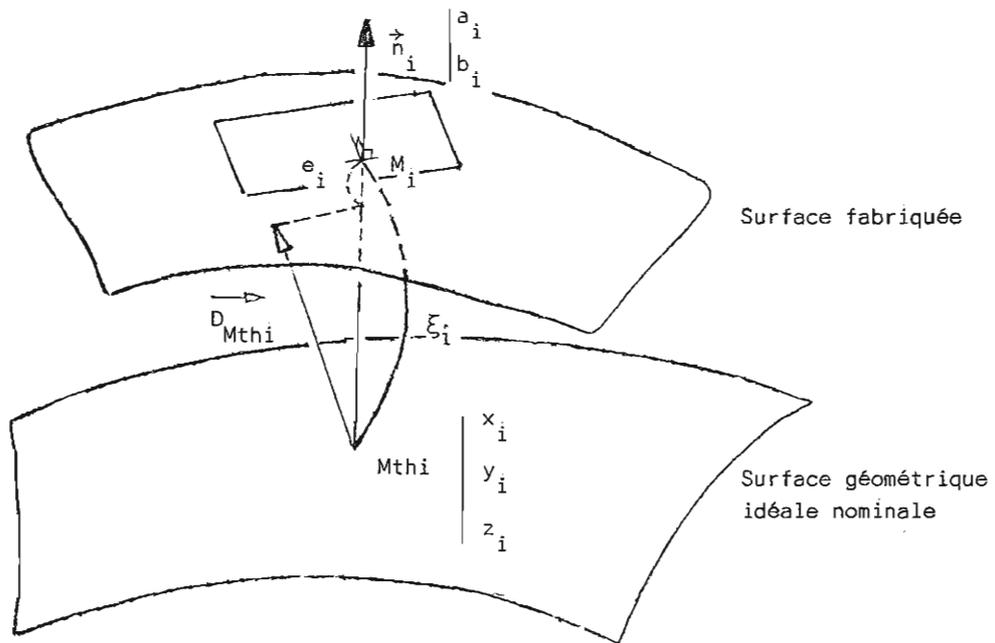
Dans l'analyse faite précédemment, nous avons vu que l'imprécision et la non répétitivité des résultats venaient du choix arbitraire de la direction générale de la surface. Il en est de même dans le contrôle de surfaces quelconques où ce problème général se trouve posé avec plus d'acuité encore.

C'est pourquoi, nous nous proposons de déterminer, dans le cas général sans balancement manuel précis (rapidité) la coïncidence optimale (objectivité et précision) entre la surface fabriquée et la surface géométrique idéale [BOURDET-CLEMENT. 76].

La surface géométrique idéale n'est pas donnée nécessairement par son équation, mais quelle qu'en soit sa géométrie elle peut être ramenée à un tableau $(x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i)$ des coordonnées x_i, y_i, z_i de points théoriques M_{thi} et des cosinus directeurs a_i, b_i, c_i des normales \vec{n}_i à la surface, en ces points.

La surface fabriquée est définie par l'ensemble des points palpés M_i . Quel que soit la géométrie de la surface par calcul, on fait coïncider n points palpés M_i de la surface fabriquée avec les n points théoriques M_{thi} correspondants de la surface idéale nominale ($n \leq 6$, n est le rang de la surface idéale nominale considérée). On calcule alors pour tous les autres couples de points $\{M_i ; M_{thi}\}$ et suivant la normale \vec{n}_i les écarts de mesure ξ_i .

La surface fabriquée est alors connue sous sa forme la plus générale applicable à tous les cas de géométrie des surfaces, c'est-à-dire par une surface géométrique idéale nominale définie par un ensemble de points théoriques M_{thi} , de normales \vec{n}_i et d'écarts de mesure ξ_i mesurés suivant les normales \vec{n}_i , représentant des distances M_i M_{th} entre points palpés et points théoriques.



Mise en équations :

Désignons par $[\tau_A]$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{D}_A \end{array} \right.$ l'expression au point A

du torseur des déplacements très petits qui doit permettre de faire passer la surface géométrique idéale nominale de la position actuelle à une position telle, qu'elle coïncide d'une manière significative avec la surface fabriquée.

La surface fabriquée n'est jamais superposable à la surface théorique, c'est-à-dire que le point M_{thi} ne vient pas nécessairement en M_i (ceci n'est possible que pour un nombre de points $p \leq 6$ comme nous l'avons vu précédemment). On minimise les écarts de superposition en donnant un déplacement $\vec{D}_{M_{thi}}$ tel que la position finale de M_{thi} soit globalement le plus près possible du plan tangent en M_i.

Ce qu'on peut écrire algébriquement :

$$\xi_i - \vec{D}_{M_{thi}} \cdot \vec{n}_i = e_i$$

Le champ de déplacements infiniment petits, étant un champ de moment on a, à partir d'un point de référence A :

$$\vec{D}_{M_{thi}} = \vec{D}_A + \overrightarrow{AM_{thi}} \wedge \vec{R}$$

L'équation (1) devient :

$$\xi_i - (\vec{D}_A \cdot \vec{n}_i + (\overrightarrow{AM_{thi}} \wedge \vec{n}_i) \cdot \vec{R}) = e_i$$

Sous cette forme, la parenthèse de l'équation représente

le comoment du torseur déplacement $(\tau_A) \cdot \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{D}_A \end{cases}$ et du torseur

des coordonnées plückériennes du vecteur $\vec{n}_i [P_i]_A \begin{cases} \vec{n}_i \\ \overrightarrow{AM_{thi}} \wedge \vec{n}_i \end{cases}$

soit sous forme condensée

$$e_i = \xi_i - [P_i]_A \cdot [\tau_A]$$

On écrit une relation analogue pour chaque point de mesure. On obtient un système de p équations linéaires pour 6 inconnues ($\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$) les 6 composantes du torseur de petits déplacements.

Si le nombre de points définissant la surface était uniquement de 6 (cas général) et judicieusement choisi, on obtiendrait un système de 6 équations linéaires indépendantes et on aurait une solution avec :

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = 0,$$

c'est-à-dire une superposition des 6 points palpés aux 6 points de la surface géométrique idéale. Mais 6 points de mesure sont insuffisants pour donner l'image de la forme de la pièce, et dans tous les cas, nous aurons un nombre de points p très supérieur à 6, en conséquence nous sommes en présence d'un système de p équations linéaires pour n inconnues avec dans tous les cas $p \geq n$ et $n \leq 6$.

Nous proposons deux méthodes pour résoudre ce système d'équations :

- une méthode de GAUSS pour obtenir une répartition statistique des écarts e_i autour de la surface géométrique idéale,

- une méthode de programmation linéaire permettant de minimiser ou de maximiser une fonction objectif.

3.1 Méthode de GAUSS :

On forme la fonction W constituée par la somme des e_i^2 soit :

$$W = \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i - [P_i]_A \cdot [\zeta_A])^2$$

Cette fonction W doit être minimum pour que la solution vérifie au mieux le système de n équations. On obtient dans le cas général, un système de 6 équations en écrivant que :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \\ \\ \frac{\partial W}{\partial u} = 0 & \frac{\partial W}{\partial v} = 0 & \frac{\partial W}{\partial w} = 0 \end{array}$$

Ce système est évidemment linéaire et la résolution donne un torseur déplacement $(\alpha, \beta, \gamma, u, v, w)$ que nous appellerons le déplacement significatif et qui correspond au balancement optimal des moindres carrés de la surface idéale nominale pour l'amener au mieux des points palpés.

L'exploitation des résultats est immédiate :

- par le calcul on fait subir aux points théoriques nominaux le déplacement significatif et l'on détermine les nouvelles distances e_i , c'est-à-dire les écarts entre la surface géométrique idéale optimisée et la surface fabriquée.

Il est clair que cette méthode s'applique quelle que soit la forme de la surface à contrôler. En effet, la surface étant définie uniquement par des points et des normales, on est toujours ramené aux mêmes équations linéaires.

3.1.1 Mise en équation détaillée dans le cas d'une surface de rang 6 (critère de GAUSS)

En tout point I de la surface correspond un point théorique nominal Mthi de coordonnées x_i, y_i, z_i , une normale théorique \vec{n}_i définie par ses cosinus directeurs a_i, b_i , et c_i ; un écart ξ_i mesuré suivant la normale.

Appelons $[\zeta_A]$ $\begin{cases} \alpha \vec{x} & u \vec{x} \\ \beta \vec{y} & v \vec{y} \\ \gamma \vec{z} & w \vec{z} \end{cases}$ le torseur des petits déplacements,

ou encore le torseur caractérisant les écarts entre la surface géométrique idéale nominale, et la surface géométrique idéale optimisée.

et $[\mathcal{P}_i]_A$ les coordonnées Pluckériennes du vecteur \vec{n}_i ayant pour expression :

$$[\mathcal{P}_i]_A \begin{cases} a_i \vec{x} & (y_i c_i - z_i b_i) \vec{x} \\ b_i \vec{y} & (z_i a_i - x_i c_i) \vec{y} \\ c_i \vec{z} & (x_i b_i - y_i a_i) \vec{z} \end{cases}$$

Exprimons que $\xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\zeta_A] = e_i$

soit en posant
$$\begin{aligned} L_i &= y_i c_i - z_i b_i \\ M_i &= z_i a_i - x_i c_i \\ N_i &= x_i b_i - y_i a_i \end{aligned}$$

Formons la fonction $W = \sum e_i^2$

$$W = \sum_{i=1}^{i=n} [\xi_i - (u a_i + v b_i + w c_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)]^2$$

et écrivons sous forme matricielle le système de 6 équations linéaires obtenues en écrivant que :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \\ \\ \frac{\partial W}{\partial u} = 0 & \frac{\partial W}{\partial v} = 0 & \frac{\partial W}{\partial w} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc| |c| | \sum a_i \xi_i |} \\ \hline \sum a_i^2 & \sum b_i a_i & \sum c_i a_i & \sum L_i a_i & \sum M_i a_i & \sum N_i a_i & | & u & | \\ \hline \sum a_i b_i & \sum b_i^2 & \sum c_i b_i & \sum L_i b_i & \sum M_i b_i & \sum N_i b_i & | & v & | \\ \hline \sum a_i c_i & \sum b_i c_i & \sum c_i^2 & \sum L_i c_i & \sum M_i c_i & \sum N_i c_i & | & w & | \\ \hline \sum a_i L_i & \sum b_i L_i & \sum c_i L_i & \sum L_i^2 & \sum M_i L_i & \sum N_i L_i & | & \alpha & | \\ \hline \sum a_i M_i & \sum b_i M_i & \sum c_i M_i & \sum L_i M_i & \sum M_i^2 & \sum N_i M_i & | & \beta & | \\ \hline \sum a_i N_i & \sum b_i N_i & \sum c_i N_i & \sum L_i N_i & \sum M_i N_i & \sum N_i^2 & | & \gamma & | \\ \hline \end{array}$$

Si la surface est de rang 6, la résolution du système d'équations donne les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$. Elles caractérisent la position de la surface réelle par rapport à la surface théorique idéale nominale et permettent de calculer les écarts optimisés par la formule :

$$e_i = \xi_i - (u a_i + v b_i + w c_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)$$

3.1.2 Application : contrôle d'une ferrure de réacteur.

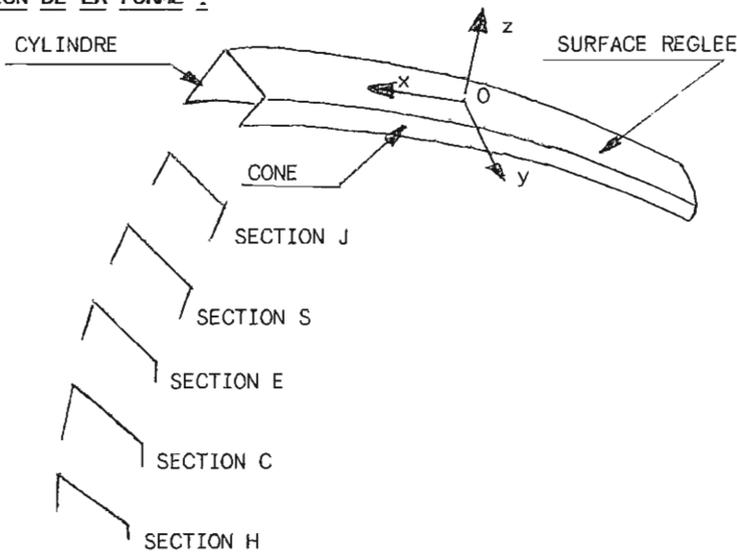
La surface est définie dans le repère xyz, par un ensemble de points et de normales en ces points. Usinée sur fraiseuse par un procédé de copiage d'un modèle, la pièce a été bridée sur la machine-outil par l'intermédiaire de deux pattes provisoires enlevées par sciage après usinage. La matière étant difficilement usinable et très déformable, on est obligé de vérifier si la pièce terminée répond toujours aux spécifications du dessin.

Dans cet exemple la pièce a été placée sur des appuis réglables sur une machine à mesurer tridimensionnelle à commande numérique. Un opérateur a essayé par essais successifs, de faire coïncider les points mesurés aux points théoriques avec un écart maximum de $\pm 0,3$ mm. Malgré l'expérience et l'habilité, de l'opérateur certains écarts sont restés de l'ordre de 2 à 3 mm. En conclusion cette métrologie trouve la pièce hors-tolérance et par suite non conforme aux spécifications du dessin.

En appliquant à cette forme complexe la méthode générale proposée, on calcule une position optimale de moindres carrés définie par les 6 petits déplacements $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$, on trouve dans ce cas tous les écarts inférieurs à la tolérance imposée (tableau 1). La pièce est déclarée bonne.

Si le critère de répétition Gaussienne des écarts e_i autour de la surface géométrique idéale optimisée est une bonne représentation de la surface fabriquée, ce critère ne minimise pas le défaut de forme, aussi nous proposons maintenant de résoudre le problème par une méthode de programmation linéaire.

SCHEMATISATION DE LA FORME :



EXTRAIT DU LISTING DES RESULTATS :

N°	Définition théorique de la pièce			Ecart mesuré après balançage manuel de la pièce : ξ_i	Ecart optimisé par GAUSS e_i
	x	y	z		
4	-77.389	76.189	0.000	2.200	0.000
5	-32.129	0.000	-38.099	1.400	-0.202
6	-73.709	0.000	0.000	2.290	0.150
7	-32.250	12.699	-38.099	1.490	-0.256
8	-73.809	12.699	0.000	2.360	0.054
9	-32.639	25.399	-38.099	1.490	-0.332
10	-74.129	25.399	0.000	2.290	0.048
11	-34.159	50.799	-38.099	1.520	-0.268
12	-75.369	50.799	0.000	2.220	0.006
13	-36.659	76.199	-38.099	1.500	-0.210
24	-66.399	228.599	-38.099	1.170	0.277
25	-29.219	254.000	-38.099	0.580	0.271
26	-61.459	254.000	-50.799	1.020	0.204
27	-27.189	279.399	-101.599	0.400	0.247
28	-57.459	279.399	-63.500	0.760	0.211
30	-54.259	304.799	-76.199	0.610	0.028
31	-25.619	330.199	-127.000	0.310	0.311
32	-51.699	330.199	-88.899	0.650	0.045
33	-18.309	355.599	-152.399	0.230	0.098
40	-28.469	419.099	-165.099	-0.019	0.008
41	-48.239	419.099	-127.000	0.130	0.241
42	-43.549	431.799	-139.699	-0.009	0.092
43	-14.379	406.409	-190.500	-0.039	0.065
62	-91.989	-177.809	0.000	2.440	-0.321
63	-60.319	-203.199	-38.099	1.820	-0.172
71	-54.259	-304.799	-76.199	1.250	-0.037
73	-51.699	-330.199	-127.000	0.080	-0.219
74	-18.309	-355.599	-152.399	0.420	-0.149

TABLEAU 1: CONTROLE D'UNE FERRURE DE REACTEUR

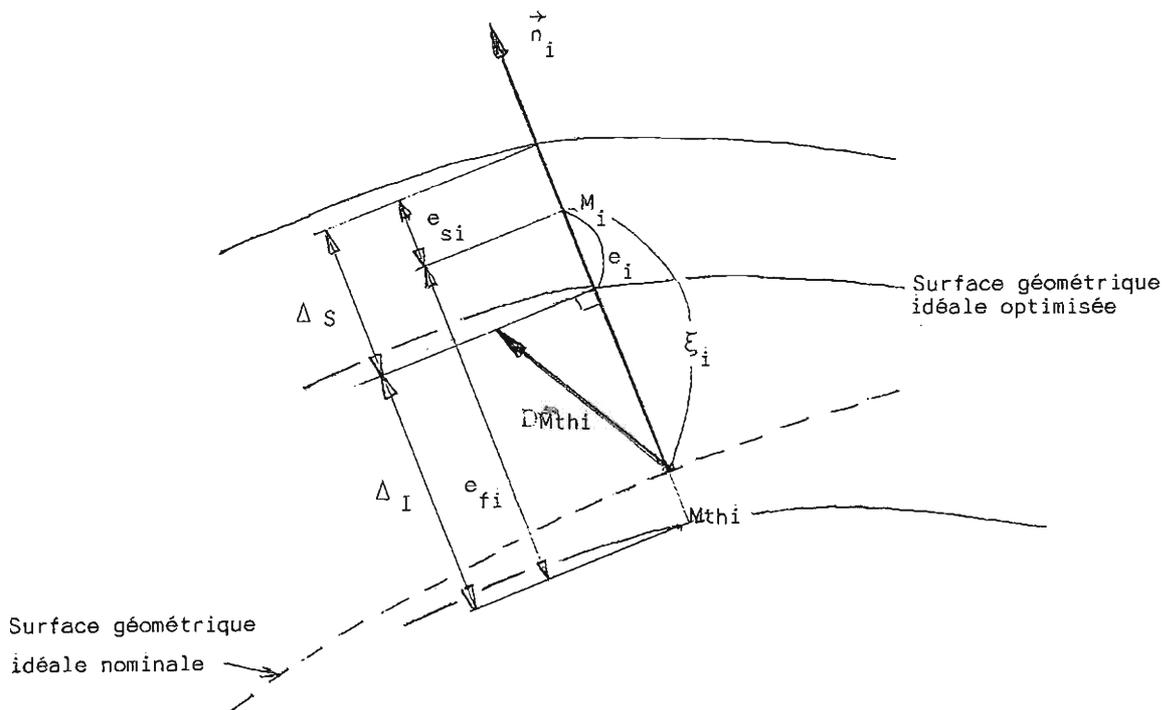
3.2 Méthode par programmation linéaire :

En chaque point de mesure on impose à l'écart optimisé $e_i = \xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]$ une contrainte supplémentaire d'appartenance à un domaine, tout en formulant une fonction objectif à minimiser ou à maximiser, par exemple, défaut de forme mini, plus petite ou plus grande surface enveloppe extérieure ou intérieure etc...

Cette formulation permet de résoudre par la méthode du simplexe toute surface. En effet, quel que soit le rang ou la complexité de la surface, le problème est mis dans tous les cas sous la forme canonique :

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad Z = C.X \\ \text{avec} \quad A.X = B \\ \text{et} \quad X \geq 0 \quad \{X = x_1, x_2, \dots, x_k\} \end{array} \right. .$$

3.2.1 Fonction objectif : défaut de forme mini



La surface fabriquée est définie par l'ensemble des points palpés M_i .

On fait subir à la surface géométrique idéale nominale (définie comme passant par n points palpés avec $n < 6$) un petit déplacement de telle façon que l'ensemble des points palpés M_i restent entre deux surfaces enveloppes des sphères de rayons respectifs ΔS et ΔI et dont les centres sont situés sur la surface géométrique idéale optimisée [NF 83].

Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta S - e_i &\geq 0 \\ \Delta I - e_i &\leq 0\end{aligned}$$

avec comme fonction objectif le défaut de forme minimum : $\Delta S - \Delta I$ minimum.

$$\text{sachant que } e_i = \xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]$$

si p est le nombre de points de mesure, on obtient quelque soit la forme de la surface $2p$ inéquations linéaires que l'on résoud par la méthode du simplexe.

$$\begin{aligned}\Delta S - (\xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]) &\geq 0 \\ \Delta I - (\xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]) &\leq 0\end{aligned}$$

avec le défaut de forme $Z = \Delta S - \Delta I$ à minimiser.

On obtient le torseur de petit déplacement $(\alpha, \beta, \gamma, u, v, w)$ et par suite on calcule les écarts optimisés

$$e_i = \xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]$$

suivant le critère défaut de forme mini.

3.2.1.1 Mise en équation détaillée dans le cas d'une surface de rang 6 (critère défaut de forme)

$$\text{Soit } [\zeta_A] \begin{cases} \alpha \cdot \vec{X} \\ \beta \cdot \vec{Y} \\ \gamma \cdot \vec{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} u \cdot \vec{X} \\ v \cdot \vec{Y} \\ w \cdot \vec{Z} \end{cases}$$

Pour tout point de mesure d'indice i on a :

$$[\mathcal{P}_i]_A \begin{cases} a_i \cdot \vec{X} \\ b_i \cdot \vec{Y} \\ c_i \cdot \vec{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} L_i = (y_i c_i - z_i b_i) \cdot \vec{X} \\ M_i = (z_i a_i - x_i c_i) \cdot \vec{Y} \\ N_i = (x_i b_i - y_i a_i) \cdot \vec{Z} \end{cases}$$

Soit

$$\Delta S - [\xi_i - (u a_i + v b_i + w c_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)] \geq 0$$

$$\Delta I - [\xi_i - (u a_i + v b_i + w c_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)] \leq 0$$

Le problème est composé de huit inconnues qui sont ΔS , ΔI , α , β , γ , u , v , et w .

Pour utiliser les algorithmes du simplexe mettons le problème sous la forme standard du type :

$$\text{Minimiser } Z = C \cdot X$$

$$Ax = B$$

$$X \geq 0 \text{ avec } X = (x_1, x_2 \dots x_k)$$

ce qui introduit des variables d'écarts :

$$\text{soit } \Delta S_1 - \Delta S_2 = \Delta S \text{ avec } \Delta S_1 > 0 \text{ et } \Delta S_2 \geq 0$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 = \Delta I \text{ avec } \Delta I_1 > 0 \text{ et } \Delta I_2 \geq 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha \text{ avec } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \geq 0$$

$$\beta_1 - \beta_2 = \beta \text{ avec } \beta_1 \text{ et } \beta_2 \geq 0$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma \text{ avec } \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \geq 0$$

$$u_1 - u_2 = u \text{ avec } u_1 \text{ et } u_2 \geq 0$$

$$v_1 - v_2 = v \text{ avec } v_1 \text{ et } v_2 \geq 0$$

$$w_1 - w_2 = w \text{ avec } w_1 \text{ et } w_2 \geq 0$$

le système à résoudre devient :

$$\text{minimiser } Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2$$

Pour tout point de mesure d'indice i on a :

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 + (u_1 - u_2)a_i + (v_1 - v_2)b_i + (w_1 - w_2)c_i + (\alpha_1 - \alpha_2)L_i + (\beta_1 - \beta_2)M_i + (\gamma_1 - \gamma_2)N_i - K_i = \xi_i$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 + (u_1 - u_2)a_i + (v_1 - v_2)b_i + (w_1 - w_2)c_i + (\alpha_1 - \alpha_2)L_i + (\beta_1 - \beta_2)M_i + (\gamma_1 - \gamma_2)N_i + T_i = \xi_i$$

Après résolution pour le simplexe on obtient :

le défaut de forme $\text{mini } \Delta S_1 - \Delta S_2 + \Delta I_1 - \Delta I_2$
le torseur des petits déplacements au point A

$$\text{les écarts optimisés } e_i = \xi_i - [\tilde{\chi}_A] \cdot [\mathcal{P}_I]_A$$

3.2.1.2 Application au contrôle d'une électrode laser :

Le profil théorique de l'électrode est définie par des équations qui déterminent à l'aide de paramètres variables, les points M_{thi} et leurs normales associées.

Equation du profil de l'électrode dans le repère (O,X,Y,Z):

$$\vec{OM}_i = \begin{cases} X = f(M) * \cos(\theta) \\ Y = g(M) \\ Z = f(M) * \sin(\theta) + I \end{cases}$$

$$\text{avec } f(M) = 10 * \left| \frac{M - K^2 * \text{sh}(M)}{\pi/2 + \text{Arcsin}(K) + k\sqrt{1-K^2}} \right|$$

$$\text{et } g(M) = 10 * \left| \frac{\pi/2 + \text{Arcsin}(K) + K\sqrt{1-k^2} \text{ch}(M)}{\pi/2 + \text{Arcsin}(K) + K\sqrt{1-K^2}} \right|$$

$$K = 0.01780295$$

$$\text{sh}(M) = (\exp(M) - \exp(-M)) / 2 ;$$

$$\text{ch}(M) = (\exp(M) + \exp(-M)) / 2$$

Equation de la normale au point M_i :

$$\vec{n}_i = (U/Q, V/Q, W/Q)$$

$$\text{avec } U = \frac{K \sqrt{1-K^2} * \text{sh}(M) * \cos(\theta)}{\sqrt{(1-K^2)^2 + K^2(\text{ch}(M)-1)^2}}$$

$$V = \frac{-(1-K^2) * \text{ch}(M)}{\sqrt{(1-K^2)^2 + k^2(\text{ch}(M)-1)^2}}$$

$$W = \frac{k \sqrt{1-k^2} * \text{sh}(M) * \sin(\theta)}{\sqrt{(1-K^2)^2 + K^2(\text{ch}(M)-1)^2}}$$

$$\text{Et } Q = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$$

Le paramètre M varie de -5.843353167 à +5.843353167
Ce qui correspond à Ymaxi = 19 mm.

Création des points Mthi de la surface géométrique idéale

Pour créer ces points, on choisit 5 valeurs de
M : 1,2.8,4,5 et 5.3.

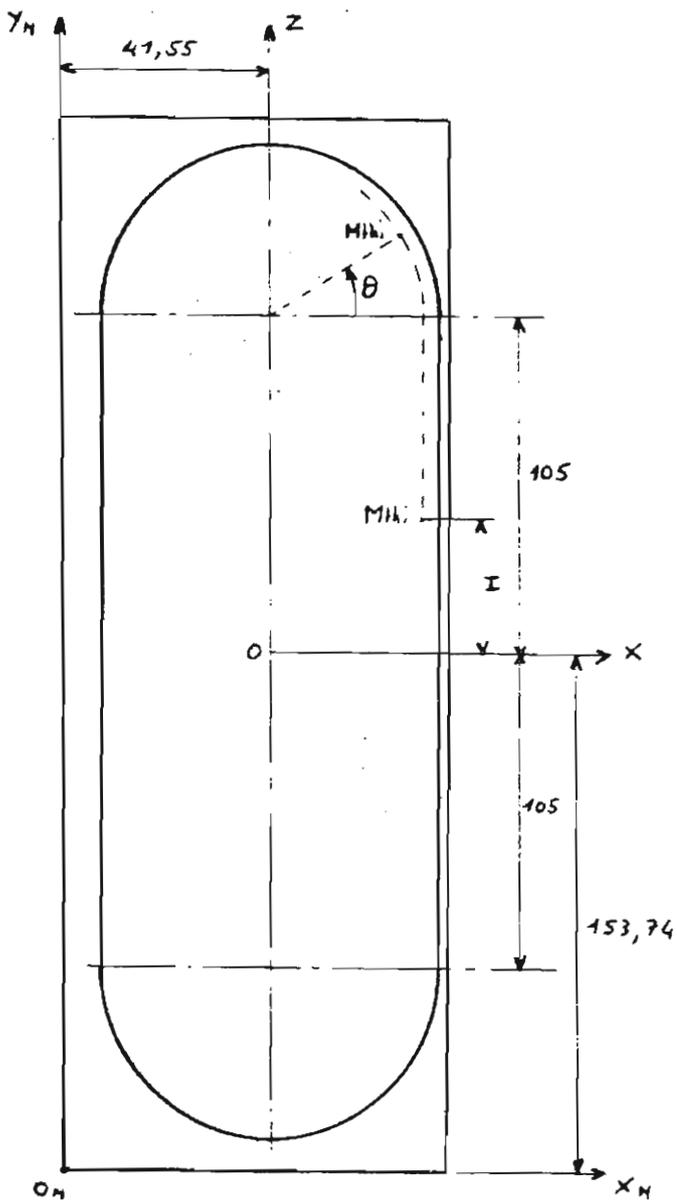
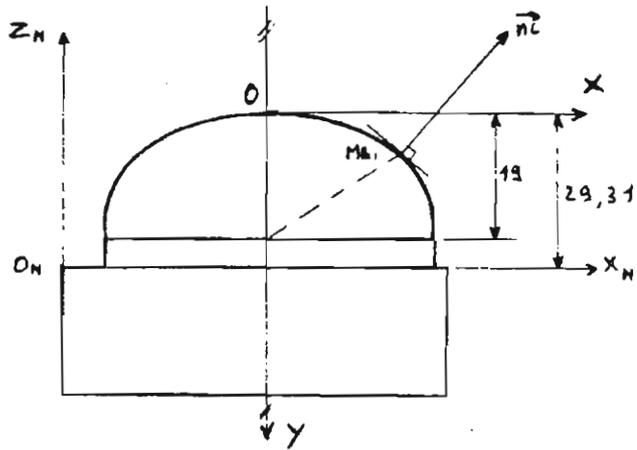
Pour une valeur de M donnée :

- I varie de -105 à +105 avec $\theta = 0^\circ$
- θ varie de 0° à 180° avec I = 105
- I varie de +105 à -105 avec $\theta = 180^\circ$
- θ varie de 180° à 360° avec I = -105

A partir de ces paramètres, on obtient le fichier
surface géométrique idéale comprenant 74 points théoriques
et leurs normales associées.

Par commande numérique d'une machine à mesurer
tridimensionnelle S.E.I.V. on vient palper la surface de
l'électrode suivant les normales \vec{n}_i passant par les points
théoriques Mthi. On relève alors les coordonnées des points
palpés Mi. On en déduit les écarts ξ_i mesurés.

Définition théorique de l'Electrode Laser :



(x_0, y_0, z_0) Repère Machine

Par la méthode du simplexe dont l'algorithme est défini en annexe A on obtient le torseur des petits déplacements exprimant au point O le petit déplacement à faire subir à la forme géométrique idéale nominale pour rendre le défaut de forme mini :

- les translations sont : $u = 0.01334$ mm
 $v = -0.07915$ mm
 $w = -0.03524$ mm

- Les rotations sont : $\alpha = -0.000040$ rd
 $\beta = 0.000073$ rd
 $\gamma = 0.000249$ rd

- Le défaut de forme vaut : $Df = 0.0505$ mm.

Si on compare ce résultat avec le défaut de forme nominale 0,14964 et le défaut de forme obtenu par les moindres carrés (0,055) on obtient respectivement une diminution de 63 % et de 8,2 % des défauts de forme.

D'autre part on peut affirmer que le défaut de forme ainsi trouvé, correspondant à un ensemble de points palpés donnés, est minimal, et répond bien à la norme internationale ISO 1101. Cette méthode devrait être acceptée par la majorité des métrologistes et par les institutions de standardisation.

3.3 Critère de petits déplacements :

La méthode générale proposée s'appuie sur une linéairalisation du déplacement de la surface géométrique idéale nominale, en considérant que le déplacement est très

petit. Il est donc nécessaire de définir un critère permettant de vérifier si le déplacement calculé par l'optimisation répond bien à l'hypothèse de petit déplacement.

3.3.1 Comparaison des écarts ξ_i , e_i et d_i :

On définit les trois écarts ξ_i , e_i et d_i de la façon suivante :

- ξ_i est l'écart nominal mesuré entre la surface fabriquée et la surface géométrique idéale nominale.
- e_i est l'écart optimisé, entre la surface fabriquée et la surface géométrique idéale optimisée, obtenu par:
- $e_i = \xi_i - [\mathcal{P}_i] \cdot [\mathcal{T}_i]$ aussi bien par la méthode de GAUSS que par la méthode du simplexe.
- d_i est la distance vraie entre la surface fabriquée et la surface géométrique idéale optimisée.

Si dans le cas de surface à géométrie simple, il est toujours possible de calculer les trois écarts ξ_i , e_i et d_i , dans le cas de surfaces complexes, le calcul exact des d_i est souvent impossible, on définit alors les écarts de forme par les e_i optimisés, en considérant que les différences entre d_i et e_i sont négligeables et du second ordre.

Vérifions cette hypothèse dans les cas simples où les distances d_i sont calculables et extrapolons les résultats au cas général de surfaces quelconques.

On définira ainsi le critère de petit déplacement C^*

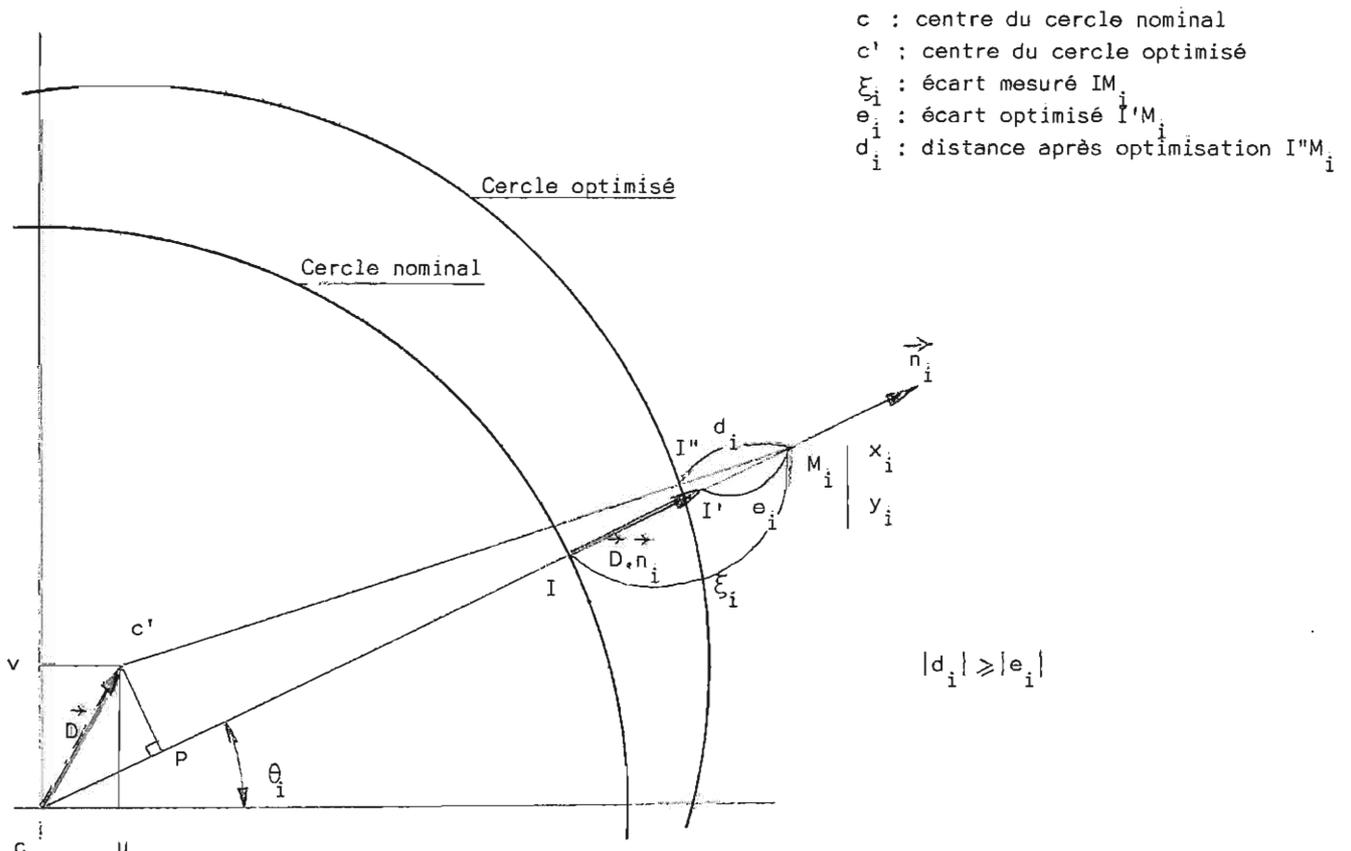
$$C^* = \text{Sup} \{ d_i - e_i \}$$

3.3.2 Cas du cercle et de la sphère :

La méthode générale proposée optimise suivant GAUSS ou le simplexe les écarts e_i et non pas les distances d_i au cercle . Les différences entre les distances d_i et les écarts e_i permettent d'apprécier la précision de la méthode et par suite l'hypothèse des déplacements très petits.

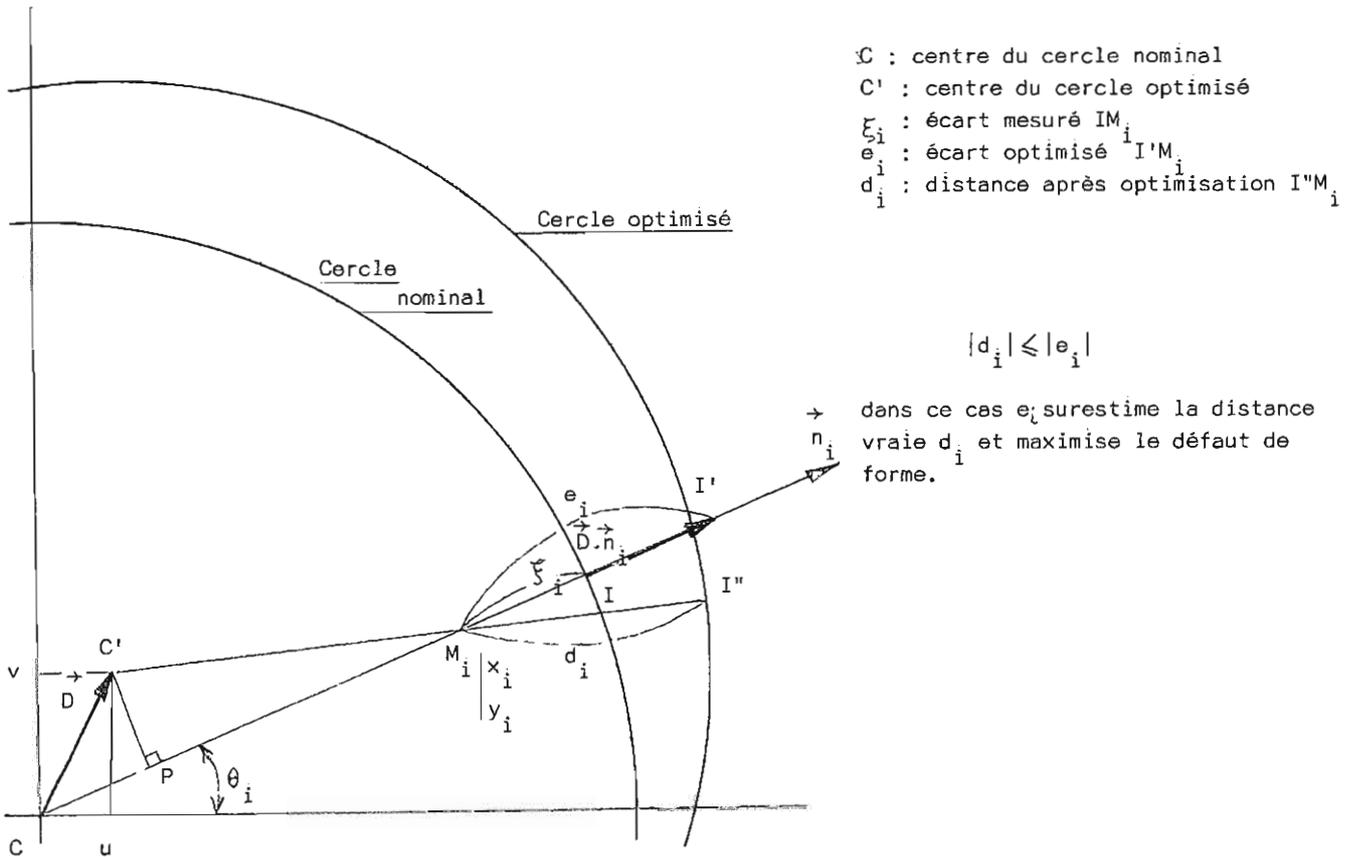
Deux cas de figure peuvent se présenter :

- Cas où d_i et e_i sont positifs (extérieurs au cercle optimisé).



dans ce cas e_i sous-estime la distance vraie d_i et minimise le défaut de forme.

- Cas ou d_i et e_i sont négatifs (intérieurs au cercle optimisé).



- dans les deux cas de figure on a en valeur algébrique avec R rayon du cercle nominal

$$d_i - e_i = [M_i C' - R] - [M_i C - CP - R]$$

(1) soit $d_i - e_i = M_i C' - M_i P$

L'optimisation nous donne le déplacement CC' défini par ses composantes u et v , ce qui donne :

$$(1) d_i - e_i = \sqrt{(x_i - u)^2 + (y_i - v)^2} - [\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - u \cos \theta_i - v \sin \theta_i]$$

Plaçons nous dans le cas où la différence $d_i - e_i$ sera maximum, c'est-à-dire lorsque le déplacement \vec{D}_I est perpendiculaire à \vec{n}

soit $\theta_i = 0$ $u = 0$ $y_i = 0$
 en prenant $x_i = R + \xi_i$, on a :

$$(1) \quad (d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \sqrt{(R + \xi_i)^2 + v^2} - (R + \xi_i).$$

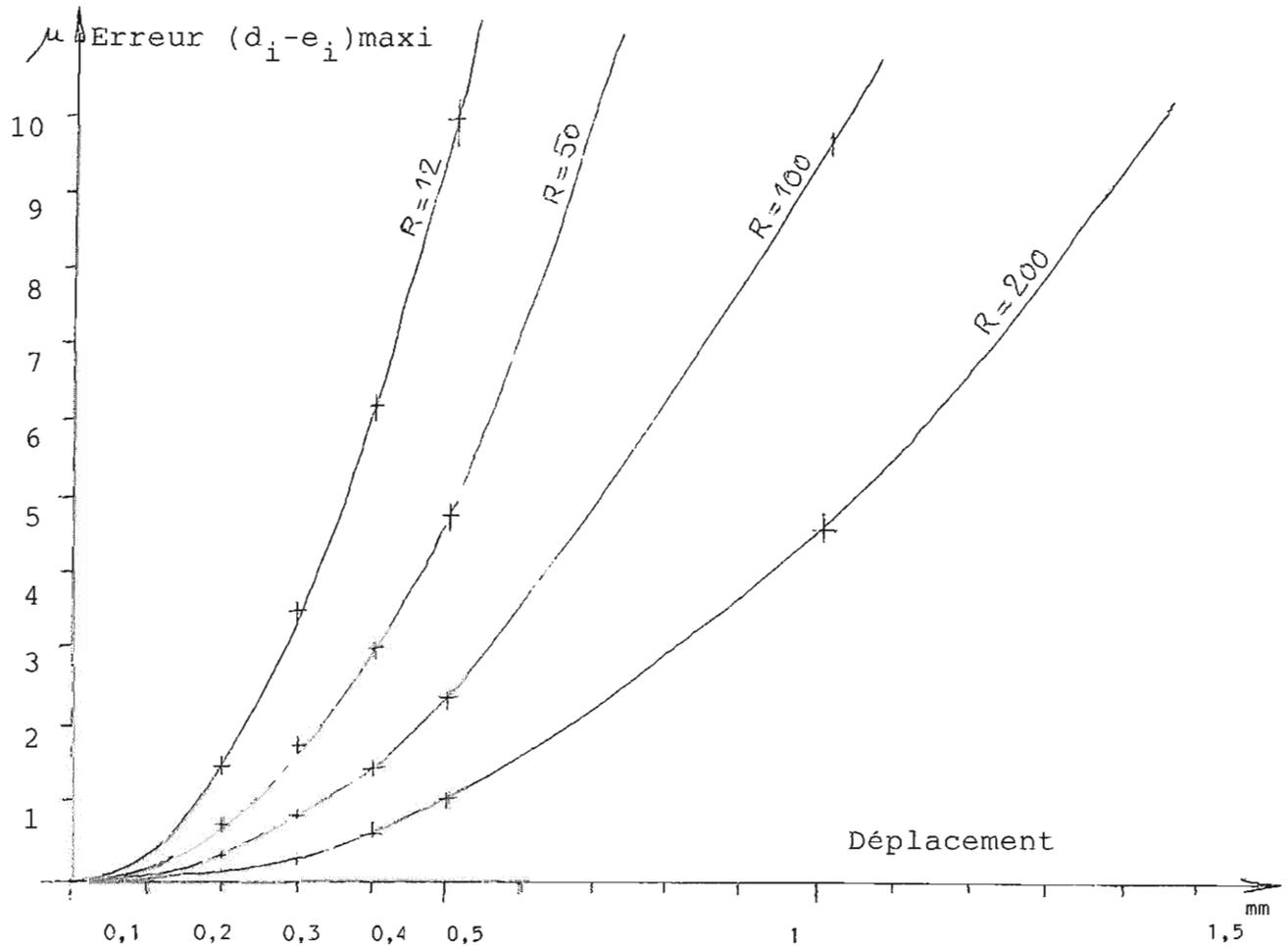
Ordre de grandeur des écarts maxi $d_i - e_i$ pour différentes valeurs du déplacement :

L'influence de ξ_i étant négligeable sur le résultat, on se place dans le cas défavorable de $\xi_i = 0$.

On obtient, en faisant varier le déplacement $|\vec{D}| = v$ de 0,01 à 4 mm pour 4 diamètres 24-50-100 et 200, les résultats suivants :

$ \vec{D} = v =$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2	4
$\phi = 24$ $R = 12$	$4 \cdot 10^{-6}$	0,0001	0,0004	0,0016	0,0037	0,0066	0,0104	0,041	0,093	0,165	0,6
$\phi = 50$ $R = 25$	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00005	0,0002	0,0008	0,0018	0,0032	0,005	0,02	0,045	0,0798	0,3
$\phi = 100$ $R = 50$	10^{-6}	0,000025	0,0001	0,0004	0,0009	0,0016	0,0025	0,01	0,0225	0,0399	0,1
$\phi = 200$ $R = 100$	$0,5 \cdot 10^{-6}$	$12,5 \cdot 10^{-6}$	0,00005	0,0002	0,00045	0,0008	0,00125	0,0049	0,0112	0,0199	0,0
Erreur $< 1\mu$						Erreur $> 1\mu$					

Soit le réseau de courbes donnant l'erreur maxi $(d_i - e_i)$ en fonction du déplacement $|\vec{D}|$ du centre du cercle.



En effectuant un développement limite de:

$$[(R + \xi_i)^2 + v^2]^{1/2}$$

et en prenant $\xi_i = 0$, l'expression (1) devient :

$$(1) \quad (d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \frac{v^2}{2R}$$

Dans le cas où le système d'axes choisis donne une composante u différente de zéro, on obtient l'erreur maxi suivant la direction \vec{n} perpendiculaire au déplacement \vec{D} de module $\sqrt{u^2 + v^2}$, soit pour un cercle complet :

$$(d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \frac{v^2 + u^2}{2R}$$

Dans le cas de la sphère complète, on aurait de la même façon, en se plaçant dans le plan M_i, C, C' l'erreur maxi donnée par la formule

$$(d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2R}$$

L'erreur en tout point M_{thi} appartenant à un cercle ou à une sphère peut être définie de la façon suivante :

si D_{pi}^{\rightarrow} est le déplacement $\vec{D}(u, v, w)$ du centre du cercle ou de la sphère projeté dans le plan perpendiculaire à $\vec{n}_i(a_i, b_i, c_i)$ on a en tout point M_{thi} l'écart ϵ_i :

$$\epsilon_i = (d_i - e_i) = \frac{|D_{pi}^{\rightarrow}|^2}{2R}$$

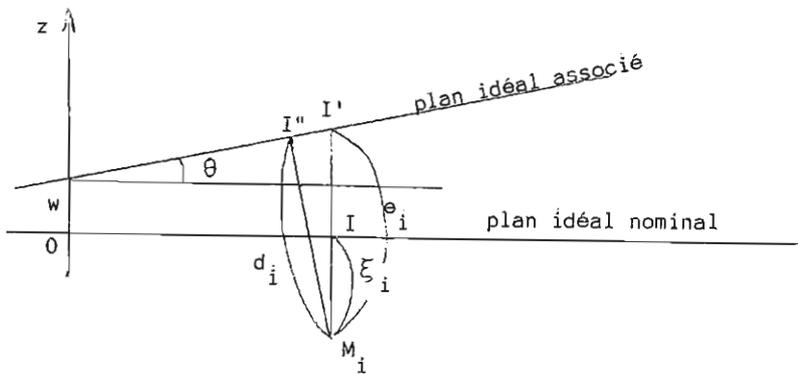
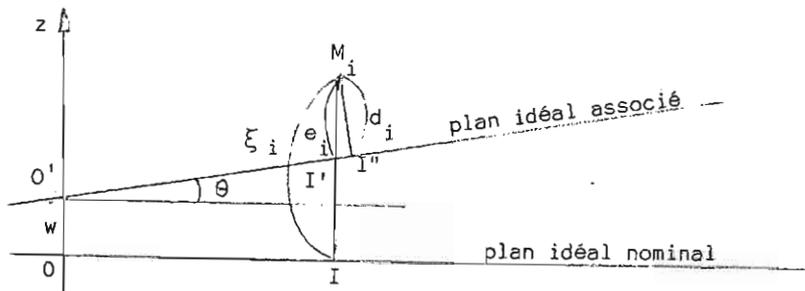
Soit :

$$\epsilon_i = |d_i - e_i| = \frac{u^2 + v^2 + w^2 - (a_i u + b_i v + c_i w)^2}{2R}$$

Dans le cas où R tend vers l'infini ϵ_i tend vers zéro. La surface étudiée devient un plan.

3.3.3 Cas du plan :

Si w est la translation au point O et θ l'angle de rotation caractérisant le torseur de petits déplacements au point O du plan idéal optimisé par GAUSS ou par le simplexe, on a les figures suivantes :



avec ξ_i écart mesuré $M_i I$

e_i écart optimisé $e_i = \xi_i - w - OI \cdot \theta$

d_i distance vraie au plan idéal optimisé $M_i I''$

La différence entre d_i et e_i est dans tous les cas de figure

$$d_i - e_i = - e_i (1 - \cos \theta)$$

Cette différence est toujours négative, et par suite les écarts e_i surestiment les distances vraies.

Ordre de grandeur des valeurs de la différence $d_i - e_i$, pour un écart e_i de 1mm.

θ	0,5°	1°	1,5°	2°	2,5°	3°	4°
$d_i - e_i$	- 0,038 μ	- 0,15 μ	- 0,34 μ	- 0,6 μ	- 0,95 μ	1,37 μ	2,4 μ
	Erreur < 1 μ					Erreur > 1 μ	

On peut considérer que cette erreur est dans tous les cas, négligeable ; en effet une rotation de 2°5 correspond déjà à un défaut de 1 mm sur une longueur de 23 mm, défaut jamais atteint dans le cas de pièces mécaniques.

3.3.4 Cas général :

Une surface quelconque peut être définie en tout point M_{thi} par sa normale $\vec{n}_i (a_i, b_i, c_i)$ et par une sphère osculatrice de centre C_i et de rayon R_i . Par la méthode d'optimisation proposée, on peut calculer le déplacement du centre C_i .

$$\vec{D}_{C_i} = \vec{D}_O + \vec{C_i O} \wedge \vec{R}$$

On obtient ainsi les 3 composantes u_i , v_i et w_i du déplacement Dc_i

La différence ϵ_i entre la distance vraie d_i et l'écart optimisé e_i sera celle trouvée dans le cas de la sphère :

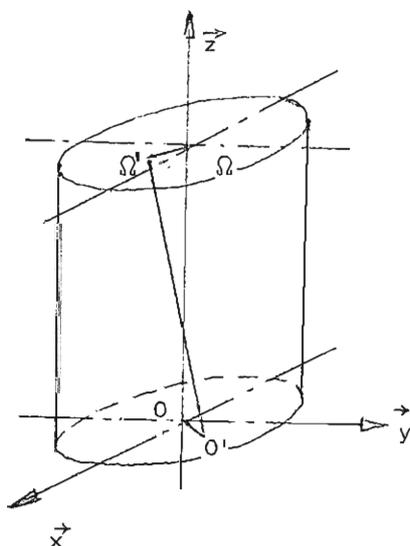
soit
$$\epsilon_i = |d_i - e_i| \leq \frac{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 - (u_i a_i + v_i b_i + w_i c_i)^2}{2R_i}$$

On en déduit immédiatement le critère de petit déplacement $C^* = \sup \{\epsilon_i\}$

Dans la pratique si celui-ci reste inférieur à 10^{-1} de la précision désirée on considère que la méthode appliquée a donné un bon résultat, et que le torseur exprime bien un petit déplacement.

3.3.5 Application de la formule générale au cylindre complet :

La sphère osculatrice de rayon R^* a son centre sur l'axe du cylindre. La différence $(d_i - e_i)$ sera maxi pour le déplacement maxi du centre de la sphère osculatrice, soit dans le plan z maxi ou le plan z mini de cote z .



L'optimisation du torseur des petits déplacements donne :

$$[\tilde{\tau}]_o \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{cases}$$

soient les déplacements :

du point Ω

$$\vec{D}_\Omega \begin{cases} (u+z\beta) \vec{x} \\ (v-z\alpha) \vec{y} \end{cases}$$

du point O

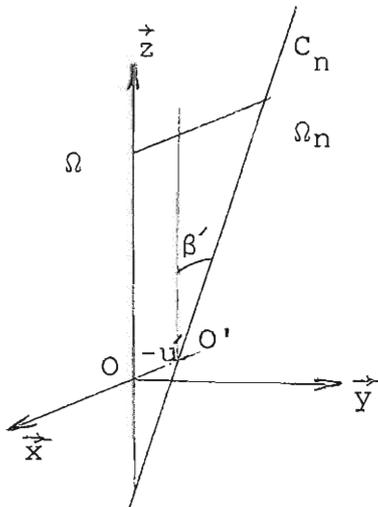
$$\vec{D}_o \begin{cases} u \vec{x} \\ v \vec{y} \end{cases}$$

La différence $(d_i - e_i)$ maxi est :

$$(d_i - e_i)_{\text{maxi}} \leq \frac{\text{Sup} \{ [(u+z \cdot \beta)^2 + (v-z \cdot \beta)^2] ; [u^2 + v^2] \}}{2R^*}$$

Vérification expérimentale :

En prenant un cylindre C_o parfait de rayon R on lui associe un cylindre nominal C_n dont l'axe fait un angle β' avec l'axe du cylindre C_o . Cet axe est translaté suivant \vec{x} de $-u'$. On calcule alors pour le point le plus défavorable :



- a) l'écart mesuré : ξ_i
- b) l'écart optimisé e_i par la méthode proposée
- c) la distance exacte d_i

Les résultats sont transcrits dans le tableau suivant :

avec l'estimation de $(d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \frac{(u+z \cdot \beta)^2}{2R^*}$

	Angle β' exact	Déplacement u' exact	Torseur Optimisé	ξ_i mesure	e_i optimisé	d_i	$(d_i - e_i)'$ maxi exact	$(d_i - e_i)$ maxi estimé	Déplacement de Ω $u' + z. \beta'$
100 mm hauteur 50 mm rayon	0°	$u' = 0,2$	$\beta = 0$ $u = 0,1999984$	0,00039998	0,00039998	0	0,0003999	0,0003999	0,2
hauteur rayon	atn 2/100 1,145°	$u' = -2$	$\beta = 0,019885$ $u = 1,9986031$	0,159712	0,1581828	$1,00210^{-6}$	0,158183	0,158976	3,987
Cylindre	atn 0,3/100	$u' = 0$	$\beta = 0,0029999$ $u = 0,610^{-7}$	0,00089998	0,00089993	210^{-6}	0,00089993	0,00089996	0,2999
	2°	$u' = 0$	$\beta = 0,034815$ $u = 0,001057$	0,1216495	0,120695	$1,3410^{-6}$	0,120696	0,12128	3,4826
hauteur rayon	atn 2/25 4,5739°	$u' = 0$	$\beta = 0,078387$ $u = 0,00019624$	0,19679	0,18551846	0,000088	0,1856	0,19240	1,96

On remarque :

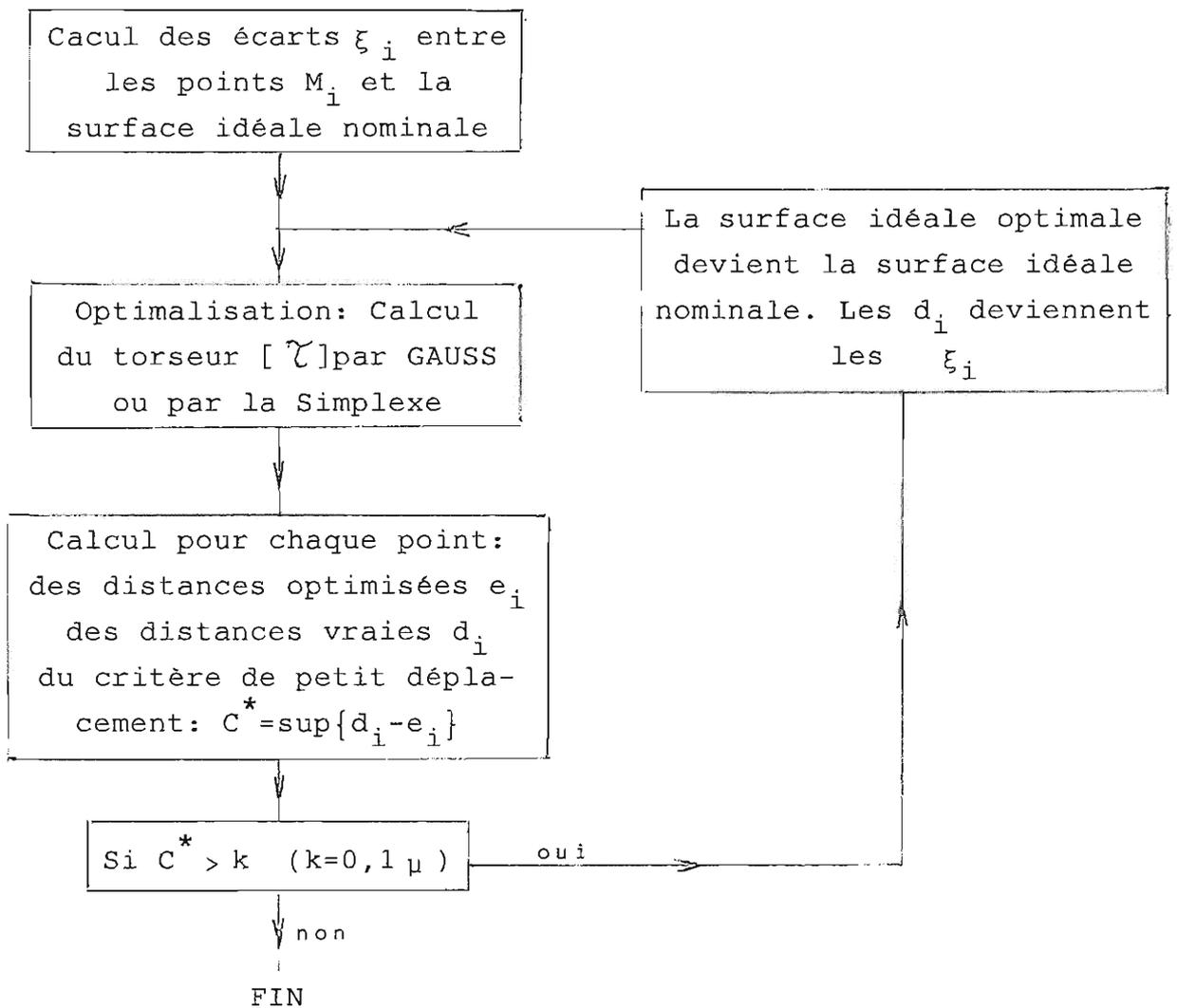
1°)- que la valeur estimée de $(d_i - e_i)$ est une bonne approximation de $(d_i - e_i)'$ réel ; moins de 3 % de surestimation pour un angle de 4°57.

2°)- que sur le plan pratique, la valeur de e_i optimisée peut être éloignée de la valeur d_i recherchée, (plusieurs dixièmes de millimètres), ainsi le critère $C^* = \sup \{d_i - e_i\}$ permet de valider l'hypothèse du torseur de petit déplacement.

3.4 Intégration du critère de petit déplacement dans la méthode générale proposée :

- 1 - Dans le cas du plan et de la droite, on considère que e_i est une très bonne approximation des distances d_i .
- 2 - Dans tous les cas où l'on peut calculer la distance d_i entre les points de mesure w_i et la surface optimisée, on suit l'algorithme suivant :

Mesure des points M_i



- 3 - Dans le cas de surfaces complexes où tout calcul de distance d_i est impossible, on estime à partir du déplacement (u_i, v_i, w_i) du centre de la sphère osculatrice de rayon R_i , les différences ϵ_i :

$$\epsilon_i = d_i - e_i = \frac{u_i^2(1-a_i^2) + v_i^2(1-b_i^2) + w_i^2(1-c_i^2)}{2R_i}$$

Si le critère de petit déplacement $C^* = \sup \{\epsilon_i\}$ est inférieur à quelques microns, on considère que les e_i sont une estimation suffisante des d_i . Dans le cas contraire on peut procéder de deux façons.

- Soit faire subir à la pièce, un déplacement réel correspondant au torseur du petit déplacement, puis recommencer une série de mesures et de calculs.
- Soit donner un résultat plus précis en ajoutant aux valeurs des e_i calculées, les accroissements ϵ_i estimés :

$$e_i = e_i + \epsilon_i$$

dans ce cas le critère d'optimisation répartition Gaussienne, ou minimisation de la fonction objectif, n'est plus respecté sur les nouveaux écarts e_i .