

UNIVERSITE DE NANCY I

THESE

présentée à
l'Université de Nancy I
pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Pierre BOURDET

Contribution à la mesure tridimensionnelle:
Modèle d'identification géométrique des surfaces,
Métrologie fonctionnelle des pièces mécaniques,
Correction géométrique des machines à mesurer
tridimensionnelles.

Soutenue publiquement le 23 juin 1987
devant la commission d'examen.

Membres du Jury :

Président : Monsieur J.P. CRESTIN

Directeur de thèse : Monsieur M. VERON

Rapporteurs : Messieurs J.C. GUINOT
F. LE MAITRE

Examineurs : Messieurs M. AUBRUN
A. CLEMENT
G. GAUTHERIN

T H E S E D ' E T A T

Auteur : Pierre BOURDET

Etablissement : Université de NANCY I

Laboratoire : L.U.R.P.A. - E.N.S. de CACHAN

Titre : "CONTRIBUTION A LA MESURE TRIDIMENSIONNELLE : MODELE D'IDENTIFICATION GEOMETRIQUE DES SURFACES, METROLOGIE FONCTIONNELLE DES PIECES MECANIQUES, CORRECTION GEOMETRIQUE DES MACHINES A MESURER TRIDIMENSIONNELLES."

Mots-clés : Machine à mesurer tridimensionnelle - Identification géométrique des surfaces - Défaut de forme mini - Torseur de petits déplacements - Correction géométrique des machines - Métrologie fonctionnelle des pièces mécaniques.

Résumé :

L'importance prise par la mesure tridimensionnelle dans les systèmes de production nécessite une nouvelle approche de la géométrie tridimensionnelle des pièces mécaniques.

L'objectif de cette recherche est de définir un modèle général d'identification géométrique de surface basé sur le torseur de petits déplacements, avec comme critère d'optimisation, soit une répartition Gaussienne des écarts, soit un défaut de forme mini, soit la plus grande ou plus petite surface tangente du côté libre de la matière. Ce modèle est appliqué aux cas de surfaces classiques en mécanique et les résultats obtenus par les différents critères sont comparés entre-eux. Il est ensuite proposé une nouvelle approche de la mesure d'un ensemble de surfaces, celle-ci n'est plus liée à une définition strictement géométrique de la distance, mais à une définition fonctionnelle de la pièce dans un ensemble mécanique, on fait ainsi coïncider cotation fonctionnelle et métrologie fonctionnelle. Enfin il est présenté une étude complète sur l'identification des écarts géométriques d'une machine à mesurer tridimensionnelle, celle-ci est expérimentée sur une machine de type Trusquin.

AVANT PROPOS

Ce travail a été réalisé à l'Ecole Normale Supérieure de CACHAN et plus particulièrement depuis 1981 au Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée (L.U.R.P.A.)

Il est le fruit d'une longue collaboration avec des amis que je souhaite remercier. Tout d'abord Monsieur A.CLEMENT puisque notre première publication relative au contenu de ce document date de 1972, Monsieur C.SAUVAIRE, Directeur de l'Agence Nationale pour le Développement de la Production Automatisée et Monsieur R.WEILL, Professeur au Technion de HAIFA pour le soutien humain et technique qu'ils m'ont apporté tout au début de ce travail. Je tiens également à remercier Monsieur le Professeur J. LE MAITRE qui m'a permis de concrétiser mes premiers travaux dans une thèse de 3ème cycle soutenue devant un jury présidé par Monsieur le Professeur SIESTRUNCK.

La réalisation industrielle de logiciels de mesure et d'expérimentations qui valident le travail exposé dans ce document a été menée à bien par le travail de toute une équipe associée au L.U.R.P.A. et plus particulièrement par Monsieur L.MATHIEU, Responsable de la Cellule de Mesure, Messieurs C.PIERRON et TH.MIRONNEAU, pour les logiciels de mesure, Messieurs J.MOREAU et LE HUEROUX pour le logiciel de correction dans le volume, Monsieur J.P. LE ROY pour le logiciel de réglage des montages d'usinages ainsi que Messieurs HERPSON et ANGUILLAUME du Laboratoire d'Essais de Machine Outil pour l'aide apportée à l'expérimentation.

Mes remerciements les plus vifs et ma gratitude s'adressent à Monsieur le Professeur VERON, Responsable du Laboratoire d'Automatique et de Commande Numérique du Centre de Recherche en Automatique de NANCY I (CRAN-CRAN), pour l'aide scientifique toute particulière qu'il m'a apportée dans la réalisation et la présentation de ce travail.

Je voudrais maintenant remercier vivement le jury présidé par Monsieur l'Ingénieur Chef de l'Armement J.P. CRESTIN qui a toujours apporté un soutien actif et efficace au développement des activités de recherche en production automatisée.

Que Messieurs J.C. GUINOT et F. LE MAITRE, Professeurs à l'Université de PARIS VI et à l'E.N.S.M. de NANTES acceptent mes remerciements pour la lecture scientifique approfondie de mon travail.

Que Monsieur AUBRUN, Professeur à l'Université de NANCY I soit remercié d'avoir bien voulu prendre connaissance de ce travail et de participer au jury.

Que Monsieur A. CLEMENT, Directeur des Recherches au Laboratoire de Mécatronique de l'I.S.M.C.M. trouve ici toute ma reconnaissance pour l'aide scientifique et humaine qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

Que Monsieur le Professeur G. GAUTHERIN soit tout spécialement remercié de l'aide qu'il a su m'apporter par la création au sein de l'E.N.S. de CACHAN du Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée puis du D.E.A. de Production Automatisée, cadre indispensable à tout travail scientifique et qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur le Recteur M.BONVALET, Directeur de l'E.N.S. de CACHAN pour le soutien humain qu'il a su m'apporter afin de me permettre d'achever ce travail.

La dactylographie a été assurée avec beaucoup de soin, de compétence et d'efficacité par Madame M.SENECHAL, je l'en remercie très vivement.

Que mes collègues et amis du Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée et du Département de Génie Mécanique de l'E.N.S. de CACHAN trouvent ici l'expression de mes remerciements chaleureux.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

1.1 Introduction.

La mesure tridimensionnelle a pris une place importante dans les systèmes de production. En effet la rentabilité économique de l'automatisation des moyens de production nécessite un contrôle rigoureux et automatique des spécifications géométriques des pièces produites. Les ateliers intègrent des machines produisant vingt quatre heures sur vingt quatre avec des temps de changement de pièces, d'outils et de production de plus en plus courts. De telles performances ne sont possibles que par des préréglages des portes-pièces et des outils et par une mesure des surfaces réalisées afin d'adapter les trajectoires réelles des outils aux formes et spécifications des pièces désirées.

Le problème général ainsi posé est celui de l'identification géométrique des surfaces réelles d'une pièce fabriquée et des trajectoires réelles d'une machine ou d'un robot. Cette identification a pour objectif d'optimiser les écarts géométriques entre une forme théorique désirée et la forme réellement exécutée, suivant un critère technologique précis. On peut citer les critères :

- optimiser les paramètres de réglage d'un porte pièce.
- optimiser le balançage des surfaces usinées dans un brut admissible.
- optimiser les corrections d'outils et de prise des origines d'une commande numérique.
- corriger les défauts géométriques des trajectoires d'une machine ou d'un robot.

- minimiser le défaut de forme d'une surface.
- vérifier ou mesurer une spécification géométrique ou fonctionnelle d'une pièce mécanique.

Cette liste de critères n'est pas limitative mais elle montre que l'objectif de cette recherche est de déterminer la meilleure identification d'une géométrie, et par suite d'obtenir la meilleure qualité des paramètres nécessaires en mesure tridimensionnelle.

1.2 Contenu et contribution de ce travail :

A première vue il paraît simple de définir une pièce comme un assemblage d'éléments géométriques simples et bien connus comme le point, la droite, le plan, le cercle, le cylindre, etc..., et de considérer la métrologie comme un simple problème de géométrie avec ses calculs d'angles et de distances. Mais une pièce fabriquée est composée de surfaces élémentaires qui ne sont jamais exactement des plans des cercles, etc...

Ainsi dans le cas par exemple d'une surface fabriquée cylindrique, celle-ci est composée d'une infinité de points. Pour un ensemble de cinq points appartenant à la surface, on peut définir un cylindre C passant par ces cinq points et identifier cette surface par ce cylindre C.

Le cylindre C ainsi défini ne passe pas par les autres points de la surface, et pour toute autre combinaison de cinq points appartenant à la surface, on obtient un cylindre différent. Le choix du cylindre représentatif de la surface devient délicat si l'on sait que celui-ci doit , par exemple:

- être d'un diamètre compris entre deux bornes,
- avoir un défaut de forme inférieur à une borne donnée.
- avoir son axe perpendiculaire avec une tolérance à l'axe d'un autre cylindre (qui lui-même est à identifier).

- avoir son axe parallèle, avec une tolérance, à un plan (qui lui-même est à identifier).
- être à deux distance d_1 et d_2 de deux plans, P_1 et P_2 .

L'identification revient à choisir un cylindre C représentatif de cette surface fabriquée cylindrique, satisfaisant de préférence les conditions imposées, et d'en donner les spécifications réelles :

- le diamètre,
- le défaut de forme,
- les défauts de parallélisme et de perpendicularité,
- les deux distances à deux plans.

La position relative de deux surfaces n'est pas non plus un problème purement géométrique, par exemple la détermination des distances de l'axe du cylindre C précédent serait simple à identifier si l'axe était parallèle aux deux plans P_1 et P_2 , ce qui n'est jamais le cas sur une pièce réelle.

D'autre part chaque point mesuré sur une surface est obtenu à l'aide d'une machine à mesurer. Chaque coordonnée des points est acquise par déclenchement d'un palpeur mécanique ou électronique monté en bout d'une chaîne de solides liés entre-eux par des liaisons mécaniques montées en série. Les mesures effectuées sont donc tributaires, entre-autre, de la qualité géométrique des différentes liaisons et de la fidélité du palpeur, en conséquence, les points palpés sont donc mesurés dans un repère curviligne non-orthonormé.

Dans le chapitre II on présente une synthèse des différentes étapes nécessaires à la modélisation d'une surface, dans le chapitre III, on propose une méthode générale

d'identification géométrique d'une surface basée sur l'utilisation du torseur de petits déplacements avec optimisation suivant un critère de GAUSS ou de défaut de forme mini ou de plus grande ou de plus petite surface tangente du côté libre de la matière. Un critère permet ensuite de vérifier la validité de l'hypothèse de petits déplacements. Le chapitre IV se rapporte à une étude détaillée de l'application de la méthode générale à l'identification sur machines à mesurer tridimensionnelles parfaites des surfaces géométriques les plus courantes, c'est-à-dire la droite, le plan, le cercle, la sphère, le cylindre et le cône. Le chapitre V présente une étude comparative des résultats obtenus par les différents critères d'optimisation dans les cas du cercle, du cylindre et du plan, et étudie l'influence d'un point aberrant sur la modélisation d'un cercle et d'un plan par les critères de GAUSS et de défaut mini.

Nous proposons ensuite dans le chapitre VI une étude sur l'identification d'une pièce mécanique. Cette étude est tout d'abord abordée sous l'aspect purement géométrique et montre les difficultés rencontrées dans l'interprétation des spécifications normalisées. On propose ensuite une nouvelle approche du problème en identifiant directement, par optimisation, les spécifications fonctionnelles de la pièce, le modèle général proposé au chapitre III permet ainsi d'effectuer une métrologie fonctionnelle de la pièce.

Enfin dans le chapitre VII nous effectuons une étude complète sur l'identification géométrique d'une machine à mesurer. Le modèle général proposé permet en effet d'identifier les 21 écarts géométriques de la machine et ensuite, d'en effectuer par logiciel une correction. Cette étude a été menée sur une machine à mesurer de type Trusquin.

Nous terminons au chapitre VIII par un bilan du travail réalisé et une conclusion sur l'état de nos réflexions.

CHAPITRE II

II - IDENTIFICATION GEOMETRIQUE D'UNE SURFACE FABRIQUEE

Une pièce mécanique est un assemblage de surfaces élémentaires auxquelles on peut associer des éléments géométriques connus. La cinématique des machines-outils, ainsi que la cinématique des liaisons entre les pièces d'un mécanisme font que dans presque tous les cas, les éléments géométriques utilisés sont : le point, la droite, le plan, le cercle, la sphère, le cylindre et le cône. Dans les autres cas, les éléments géométriques utilisés peuvent toujours être définis par une succession de points et de normales en ces points.

Identifier une pièce mécanique revient à associer à chaque surface fabriquée un élément géométrique connu, à définir les écarts de forme entre surface fabriquée et élément géométrique associé, à caractériser les paramètres de position des éléments géométriques entre-eux [MIT.82] .

Les appareils de mesure actuels utilisés en métrologie ne mesurent avec précision que des distances entre un point palpé et une référence de mesure. Ainsi une surface fabriquée ne peut être connue que par un ensemble de points palpés. Le choix du nombre de points et de leur répartition sur la surface fabriquée est directement lié à la connaissance que l'on désire obtenir de cette surface [NAW.81] ; en général on effectue un compromis entre le temps de mesure, les dimensions de la surface, le défaut de forme, l'accessibilité des points de mesure liée à la cinématique de l'appareil de métrologie, et la précision du résultat désiré.

Dans cette première étude on considère que la qualité de l'instrument de mesure est satisfaisante. On se propose d'étudier les méthodes d'association de surfaces géométriques idéales [NF.83] à un ensemble de points palpés et de proposer ensuite une nouvelle solution mathématique donnant une solution unique au problème posé.

2.1 Rappel sur les méthodes de contrôle traditionnelles de surfaces :

Les méthodes traditionnelles d'association d'une surface géométrique idéale à un ensemble de points palpés varient d'un opérateur à un autre, d'un système de mesure automatique à un autre [SCH.82]. Bien qu'il n'y ait pas unicité dans les résultats, on peut néanmoins dégager les étapes suivantes communes à toutes les méthodes.

1ère Etape :

La surface fabriquée est connue par un ensemble de points palpés : (ces points palpés peuvent être les différents points occupés successivement par le centre de la sphère du palpeur lors du palpé de la surface).

Chaque point palpé est alors défini soit par rapport à une surface géométrique idéale de référence de mesure (surface d'un marbre., axe de rotation d'une broche etc...) soit par 3 coordonnées exprimées dans un repère orthonormé.

2ème Etape : définition de la surface géométrique idéale nominale

Celle-ci est définie par le nombre minimum de points n propre à la définition géométrique stricte de la surface.

Soit : 2 points pour une droite
3 points pour un plan ou un cercle
4 points pour une sphère
5 points pour un cylindre
6 points pour un cône
n points ($n \leq 6$) pour une surface complexe de rang n.

On définit la surface géométrique idéale nominale par n points privilégiés, pris arbitrairement, parmi les points palpés. Le choix se porte le plus souvent sur les points les plus éloignés, ou les points permettant une bonne maîtrise du balancement manuel de la pièce.

On détermine alors les écarts de mesure ξ_i entre les points palpés et la surface géométrique idéale nominale. Les écarts ξ_i sont obtenus soit par calcul, soit par mesure directe de la pièce balancée dans ce cas manuellement.

On définit alors le défaut de forme nominal Df_n de la surface : $Df_n = \sup\{\xi_i\} - \inf\{\xi_i\}$.

Ce défaut de forme est un premier résultat, il dépend du choix judicieux mais non moins arbitraire des n points.

Dans le cas d'un contrôle, si le défaut de forme Df_n ainsi trouvé est inférieur à la tolérance du défaut de forme IT_f imposé par le contrôle, on conclut que la pièce est bonne ; dans le cas contraire ou Df est supérieur à IT_f on ne peut pas affirmer que la pièce soit hors tolérance mais conclure seulement que la pièce n'a pas été trouvée bonne, en effet un autre choix de n points parmi les points palpés correspondant à un autre balancement de la surface donnerait peut-être une pièce bonne.

D'autre part cette procédure de mesure ne permettra jamais d'affirmer que le défaut de forme Df_n ainsi trouvé est minimal [NF.83]

3ème Etape : Définition de la surface géométrique idéale optimisée.

Cette étape ne s'applique que lorsque la métrologie est assistée par un ordinateur, la surface géométrique idéale optimisée sera celle obtenue après un calcul d'optimisation, elle définit la direction générale de la surface.

4ème Etape : Définition de la surface géométrique idéale associée aux points palpés.

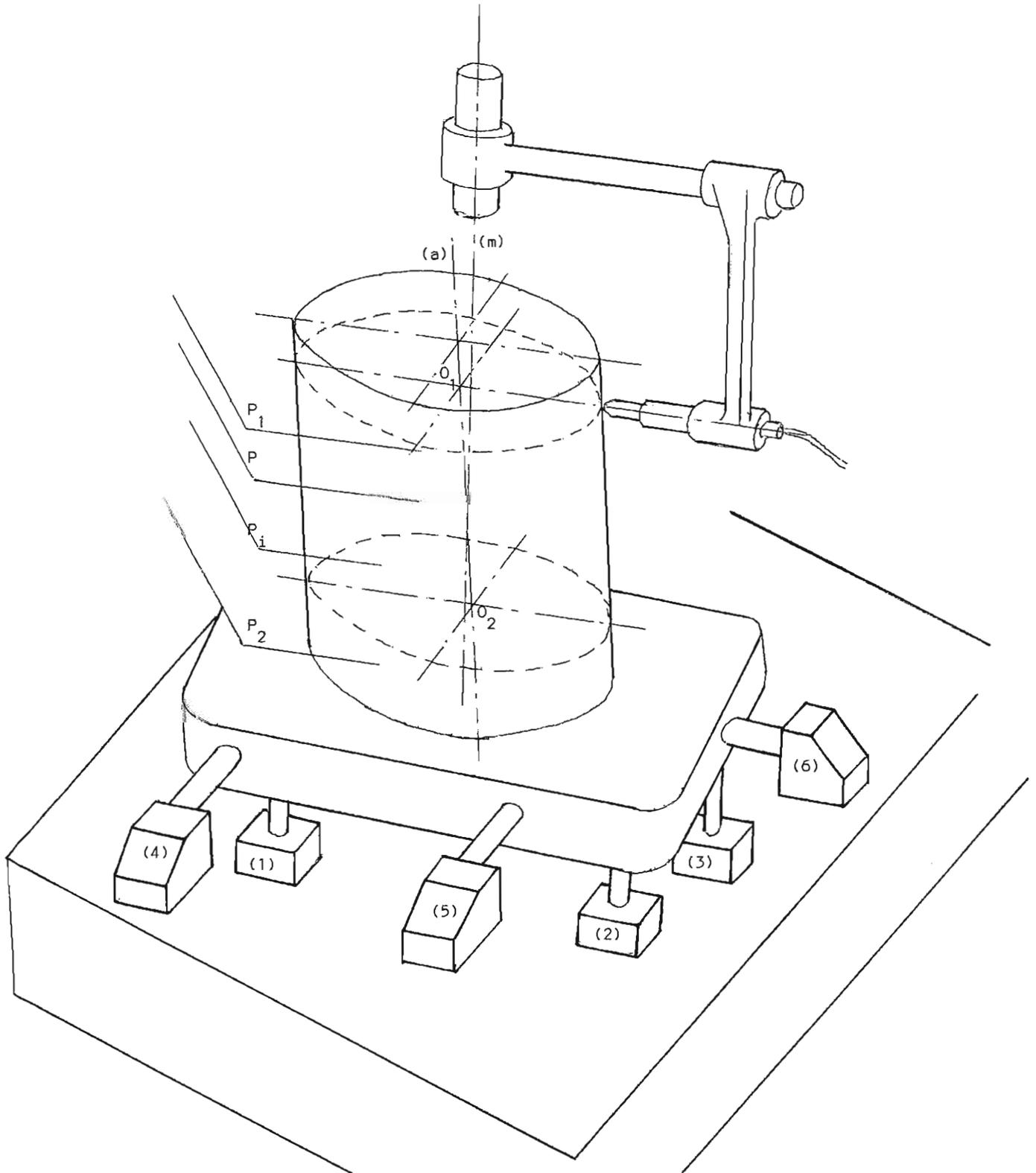
Cette surface est le plus souvent parallèle ou concentrique à la direction générale de la surface définie à l'étape 3 ou 2 et tangente du côté libre de la matière.

2.2 Application au contrôle d'une surface fabriquée cylindrique

L'opérateur dispose d'une broche ou d'un plateau tournant définissant un axe de rotation stable, et d'une direction de mesure perpendiculaire à l'axe mesuré.

La surface fabriquée cylindrique est "balancée" afin que son axe (a) soit confondu avec l'axe de mesure (m). Les trois vérins (1), (2), (3) définissent l'orientation de l'axe (a), les trois vérins (4), (5), (6) font coïncider ensuite par translation les deux axes (a) et (m) le plan d'appui (A1) étant perpendiculaire aux axes.

Cette opération de balançage très longue à mettre en oeuvre est menée le plus souvent, de la manière décrite ci-dessous :



Le cylindre idéal de référence à la mesure est le cylindre d'axe défini par l'axe de rotation (m) de la broche de l'appareil de mesure.

Dans deux plans P_1 et P_2 choisis, les plus éloignés possibles et perpendiculaires à l'axe de mesure on identifie deux cercles de centre O_1 et O_2 que l'on amène par balançage de la pièce sur l'axe de rotation de la broche.

On définit bien ainsi un cylindre idéal nominal passant par les 2 points O_1 et O_2 que l'on fait coïncider avec l'axe de rotation du cylindre idéal de mesure ce qui permet de lire directement dans les différents plans P_j les écarts ξ_i entre la surface fabriquée et le cylindre idéal nominal.

Si l'opérateur en reste là, il identifie la surface fabriquée par le cylindre d'axe $O_1 O_2$.

Le défaut de forme, le rayon et la position de l'axe du cylindre dépendent du choix arbitraire des points définissant les centres O_1 et O_2 .

Pour améliorer le résultat, l'opérateur définit par calcul un cylindre idéal optimisé de la manière suivante:

On effectue des relevés de circularité dans les plans $P_1 P_2 \dots P_n$ perpendiculaires à l'axe de mesure. Par calcul, on cherche les centres $O_1 O_2 \dots O_n$ des cercles associés aux différentes lignes relevées dans les plans. L'axe du cylindre idéal optimisé est alors défini comme étant la droite passant au mieux des n centres $O_1 O_2 \dots O_n$, on calcule ensuite les écarts d_i de forme en cherchant les nouvelles distances des points mesurés à l'axe.

Le cylindre idéal associé est alors défini par le cylindre d'axe, celui du cylindre idéal optimisé mais tangent du côté libre de la matière.

2.3 Conclusion

Quelle que soit la surface, on suit la méthodologie suivante :

La surface fabriquée connue par son ensemble de points palpés

- a) - On lie d'une manière arbitraire, mais qu'on espère objective, une surface géométrique idéale à la surface fabriquée.
- b) - On définit les écarts de forme par l'ensemble des distances entre la surface géométrique idéale associée et les points palpés caractérisant la surface fabriquée. Ces distances sont mesurées sur les normales à la surface géométrique idéale associée. Le défaut de forme est défini par le supérieur moins l'inférieur de l'ensemble des distances.
- c) - La surface fabriquée est alors connue par la surface géométrique idéale associée dont on connaît tous les paramètres dans un repère orthonormé.

On remarque que le résultat de l'identification d'une surface fabriquée est lié à la méthode d'optimisation utilisée. Il apparaît qu'il n'existe pas une méthode exacte permettant pour toute surface fabriquée de donner une solution

unique. La normalisation internationale a prévu ce manque d'unicité en normalisant [NF.83] le défaut de forme mini comme étant le critère de comparaison des résultats obtenus par différentes méthodes ou plusieurs opérateurs.

Nous nous proposons d'étudier et d'expérimenter une méthode générale capable de répondre au problème de l'association d'une surface géométrique idéale à une surface réelle.

CHAPITRE III

III - METHODE GENERALE D'IDENTIFICATION GEOMETRIQUE D'UNE SURFACE :

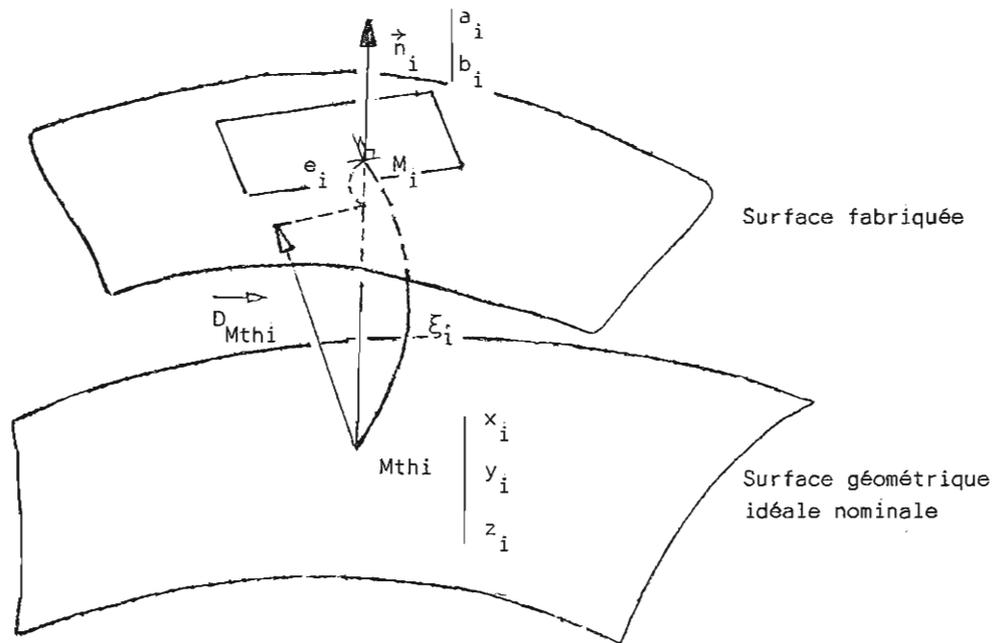
Dans l'analyse faite précédemment, nous avons vu que l'imprécision et la non répétitivité des résultats venaient du choix arbitraire de la direction générale de la surface. Il en est de même dans le contrôle de surfaces quelconques où ce problème général se trouve posé avec plus d'acuité encore.

C'est pourquoi, nous nous proposons de déterminer, dans le cas général sans balancement manuel précis (rapidité) la coïncidence optimale (objectivité et précision) entre la surface fabriquée et la surface géométrique idéale [BOURDET-CLEMENT. 76].

La surface géométrique idéale n'est pas donnée nécessairement par son équation, mais quelle qu'en soit sa géométrie elle peut être ramenée à un tableau $(x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i)$ des coordonnées x_i, y_i, z_i de points théoriques M_{thi} et des cosinus directeurs a_i, b_i, c_i des normales \vec{n}_i à la surface, en ces points.

La surface fabriquée est définie par l'ensemble des points palpés M_i . Quel que soit la géométrie de la surface par calcul, on fait coïncider n points palpés M_i de la surface fabriquée avec les n points théoriques M_{thi} correspondants de la surface idéale nominale ($n \leq 6$, n est le rang de la surface idéale nominale considérée). On calcule alors pour tous les autres couples de points $\{M_i ; M_{thi}\}$ et suivant la normale \vec{n}_i les écarts de mesure ξ_i .

La surface fabriquée est alors connue sous sa forme la plus générale applicable à tous les cas de géométrie des surfaces, c'est-à-dire par une surface géométrique idéale nominale définie par un ensemble de points théoriques M_{thi} , de normales \vec{n}_i et d'écarts de mesure ξ_i mesurés suivant les normales \vec{n}_i , représentant des distances M_i M_{th} entre points palpés et points théoriques.



Mise en équations :

Désignons par $[\tau_A]$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{D}_A \end{array} \right.$ l'expression au point A

du torseur des déplacements très petits qui doit permettre de faire passer la surface géométrique idéale nominale de la position actuelle à une position telle, qu'elle coïncide d'une manière significative avec la surface fabriquée.

La surface fabriquée n'est jamais superposable à la surface théorique, c'est-à-dire que le point M_{thi} ne vient pas nécessairement en M_i (ceci n'est possible que pour un nombre de points $p \leq 6$ comme nous l'avons vu précédemment). On minimise les écarts de superposition en donnant un déplacement $\vec{D}_{M_{thi}}$ tel que la position finale de M_{thi} soit globalement le plus près possible du plan tangent en M_i.

Ce qu'on peut écrire algébriquement :

$$\xi_i - \vec{D}_{M_{thi}} \cdot \vec{n}_i = e_i$$

Le champ de déplacements infiniment petits, étant un champ de moment on a, à partir d'un point de référence A :

$$\vec{D}_{M_{thi}} = \vec{D}_A + \overrightarrow{AM_{thi}} \wedge \vec{R}$$

L'équation (1) devient :

$$\xi_i - (\vec{D}_A \cdot \vec{n}_i + (\overrightarrow{AM_{thi}} \wedge \vec{n}_i) \cdot \vec{R}) = e_i$$

Sous cette forme, la parenthèse de l'équation représente

le comoment du torseur déplacement $(\tau_A) \cdot \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{D}_A \end{cases}$ et du torseur

des coordonnées plückériennes du vecteur $\vec{n}_i [P_i]_A \begin{cases} \vec{n}_i \\ \overrightarrow{AM_{thi}} \wedge \vec{n}_i \end{cases}$

soit sous forme condensée

$$e_i = \xi_i - [P_i]_A \cdot [\tau_A]$$

On écrit une relation analogue pour chaque point de mesure. On obtient un système de p équations linéaires pour 6 inconnues ($\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$) les 6 composantes du torseur de petits déplacements.

Si le nombre de points définissant la surface était uniquement de 6 (cas général) et judicieusement choisi, on obtiendrait un système de 6 équations linéaires indépendantes et on aurait une solution avec :

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = 0,$$

c'est-à-dire une superposition des 6 points palpés aux 6 points de la surface géométrique idéale. Mais 6 points de mesure sont insuffisants pour donner l'image de la forme de la pièce, et dans tous les cas, nous aurons un nombre de points p très supérieur à 6, en conséquence nous sommes en présence d'un système de p équations linéaires pour n inconnues avec dans tous les cas $p \geq n$ et $n \leq 6$.

Nous proposons deux méthodes pour résoudre ce système d'équations :

- une méthode de GAUSS pour obtenir une répartition statistique des écarts e_i autour de la surface géométrique idéale,

- une méthode de programmation linéaire permettant de minimiser ou de maximiser une fonction objectif.

3.1 Méthode de GAUSS :

On forme la fonction W constituée par la somme des e_i^2 soit :

$$W = \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i - [P_i]_A \cdot [\zeta_A])^2$$

Cette fonction W doit être minimum pour que la solution vérifie au mieux le système de n équations. On obtient dans le cas général, un système de 6 équations en écrivant que :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \\ \\ \frac{\partial W}{\partial u} = 0 & \frac{\partial W}{\partial v} = 0 & \frac{\partial W}{\partial w} = 0 \end{array}$$

Ce système est évidemment linéaire et la résolution donne un torseur déplacement $(\alpha, \beta, \gamma, u, v, w)$ que nous appellerons le déplacement significatif et qui correspond au balancement optimal des moindres carrés de la surface idéale nominale pour l'amener au mieux des points palpés.

L'exploitation des résultats est immédiate :

- par le calcul on fait subir aux points théoriques nominaux le déplacement significatif et l'on détermine les nouvelles distances e_i , c'est-à-dire les écarts entre la surface géométrique idéale optimisée et la surface fabriquée.

Il est clair que cette méthode s'applique quelle que soit la forme de la surface à contrôler. En effet, la surface étant définie uniquement par des points et des normales, on est toujours ramené aux mêmes équations linéaires.

3.1.1 Mise en équation détaillée dans le cas d'une surface de rang 6 (critère de GAUSS)

En tout point I de la surface correspond un point théorique nominal M_{thi} de coordonnées x_i, y_i, z_i, une normale théorique \vec{n}_i définie par ses cosinus directeurs a_i, b_i, et c_i ; un écart ξ_i mesuré suivant la normale.

Appelons $[\zeta_A]$ $\begin{cases} \alpha \vec{x} & u \vec{x} \\ \beta \vec{y} & v \vec{y} \\ \gamma \vec{z} & w \vec{z} \end{cases}$ le torseur des petits déplacements, ou encore le torseur caractérisant les écarts entre la surface géométrique idéale nominale, et la surface géométrique idéale optimisée.

et $[\mathcal{P}_i]_A$ les coordonnées Pluckériennes du vecteur \vec{n}_i ayant pour expression :

$$[\mathcal{P}_i]_A \begin{cases} a_i \vec{x} & (y_i c_i - z_i b_i) \vec{x} \\ b_i \vec{y} & (z_i a_i - x_i c_i) \vec{y} \\ c_i \vec{z} & (x_i b_i - y_i a_i) \vec{z} \end{cases}$$

Exprimons que $\xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\zeta_A] = e_i$

soit en posant

$$\begin{aligned} L_i &= y_i c_i - z_i b_i \\ M_i &= z_i a_i - x_i c_i \\ N_i &= x_i b_i - y_i a_i \end{aligned}$$

Formons la fonction $W = \sum e_i^2$

$$W = \sum_{i=1}^{i=n} [\xi_i - (u a_i + v b_i + w c_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)]^2$$

et écrivons sous forme matricielle le système de 6 équations linéaires obtenues en écrivant que :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 & \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \\ \\ \frac{\partial W}{\partial u} = 0 & \frac{\partial W}{\partial v} = 0 & \frac{\partial W}{\partial w} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc| |c| | \sum a_i \xi_i |} \\ \hline \sum a_i^2 & \sum b_i a_i & \sum c_i a_i & \sum L_i a_i & \sum M_i a_i & \sum N_i a_i & | & u & | \\ \hline \sum a_i b_i & \sum b_i^2 & \sum c_i b_i & \sum L_i b_i & \sum M_i b_i & \sum N_i b_i & | & v & | \\ \hline \sum a_i c_i & \sum b_i c_i & \sum c_i^2 & \sum L_i c_i & \sum M_i c_i & \sum N_i c_i & | & w & | \\ \hline \sum a_i L_i & \sum b_i L_i & \sum c_i L_i & \sum L_i^2 & \sum M_i L_i & \sum N_i L_i & | & \alpha & | \\ \hline \sum a_i M_i & \sum b_i M_i & \sum c_i M_i & \sum L_i M_i & \sum M_i^2 & \sum N_i M_i & | & \beta & | \\ \hline \sum a_i N_i & \sum b_i N_i & \sum c_i N_i & \sum L_i N_i & \sum M_i N_i & \sum N_i^2 & | & \gamma & | \\ \hline \end{array}$$

Si la surface est de rang 6, la résolution du système d'équations donne les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$. Elles caractérisent la position de la surface réelle par rapport à la surface théorique idéale nominale et permettent de calculer les écarts optimisés par la formule :

$$e_i = \xi_i - (u a_i + v b_i + w c_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)$$

3.1.2 Application : contrôle d'une ferrure de réacteur.

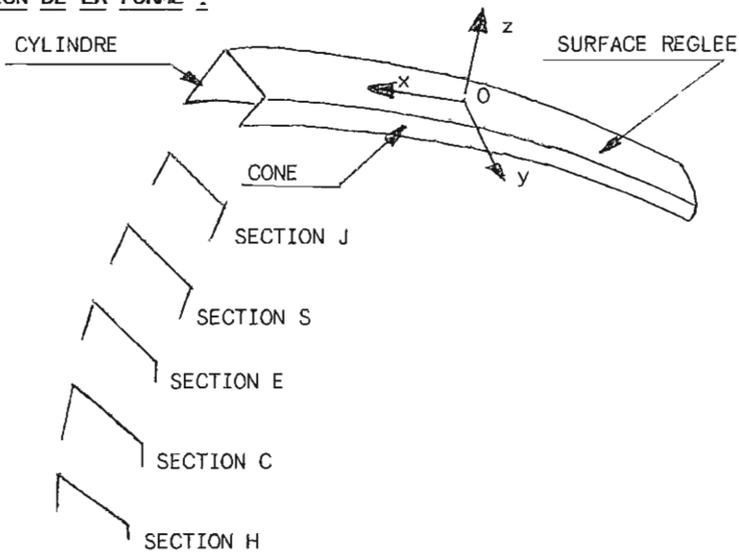
La surface est définie dans le repère xyz, par un ensemble de points et de normales en ces points. Usinée sur fraiseuse par un procédé de copiage d'un modèle, la pièce a été bridée sur la machine-outil par l'intermédiaire de deux pattes provisoires enlevées par sciage après usinage. La matière étant difficilement usinable et très déformable, on est obligé de vérifier si la pièce terminée répond toujours aux spécifications du dessin.

Dans cet exemple la pièce a été placée sur des appuis réglables sur une machine à mesurer tridimensionnelle à commande numérique. Un opérateur a essayé par essais successifs, de faire coïncider les points mesurés aux points théoriques avec un écart maximum de $\pm 0,3$ mm. Malgré l'expérience et l'habileté, de l'opérateur certains écarts sont restés de l'ordre de 2 à 3 mm. En conclusion cette métrologie trouve la pièce hors-tolérance et par suite non conforme aux spécifications du dessin.

En appliquant à cette forme complexe la méthode générale proposée, on calcule une position optimale de moindres carrés définie par les 6 petits déplacements $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$, on trouve dans ce cas tous les écarts inférieurs à la tolérance imposée (tableau 1). La pièce est déclarée bonne.

Si le critère de répétition Gaussienne des écarts e_i autour de la surface géométrique idéale optimisée est une bonne représentation de la surface fabriquée, ce critère ne minimise pas le défaut de forme, aussi nous proposons maintenant de résoudre le problème par une méthode de programmation linéaire.

SCHEMATISATION DE LA FORME :



EXTRAIT DU LISTING DES RESULTATS :

N°	Définition théorique de la pièce			Ecart mesuré après balançage manuel de la pièce : ξ_i	Ecart optimisé par GAUSS e_i
	x	y	z		
4	-77.389	76.189	0.000	2.200	0.000
5	-32.129	0.000	-38.099	1.400	-0.202
6	-73.709	0.000	0.000	2.290	0.150
7	-32.250	12.699	-38.099	1.490	-0.256
8	-73.809	12.699	0.000	2.360	0.054
9	-32.639	25.399	-38.099	1.490	-0.332
10	-74.129	25.399	0.000	2.290	0.048
11	-34.159	50.799	-38.099	1.520	-0.268
12	-75.369	50.799	0.000	2.220	0.006
13	-36.659	76.199	-38.099	1.500	-0.210
24	-66.399	228.599	-38.099	1.170	0.277
25	-29.219	254.000	-38.099	0.580	0.271
26	-61.459	254.000	-50.799	1.020	0.204
27	-27.189	279.399	-101.599	0.400	0.247
28	-57.459	279.399	-63.500	0.760	0.211
30	-54.259	304.799	-76.199	0.610	0.028
31	-25.619	330.199	-127.000	0.310	0.311
32	-51.699	330.199	-88.899	0.650	0.045
33	-18.309	355.599	-152.399	0.230	0.098
40	-28.469	419.099	-165.099	-0.019	0.008
41	-48.239	419.099	-127.000	0.130	0.241
42	-43.549	431.799	-139.699	-0.009	0.092
43	-14.379	406.409	-190.500	-0.039	0.065
62	-91.989	-177.809	0.000	2.440	-0.321
63	-60.319	-203.199	-38.099	1.820	-0.172
71	-54.259	-304.799	-76.199	1.250	-0.037
73	-51.699	-330.199	-127.000	0.080	-0.219
74	-18.309	-355.599	-152.399	0.420	-0.149

TABLEAU 1: CONTROLÉ D'UNE FERRURE DE REACTEUR

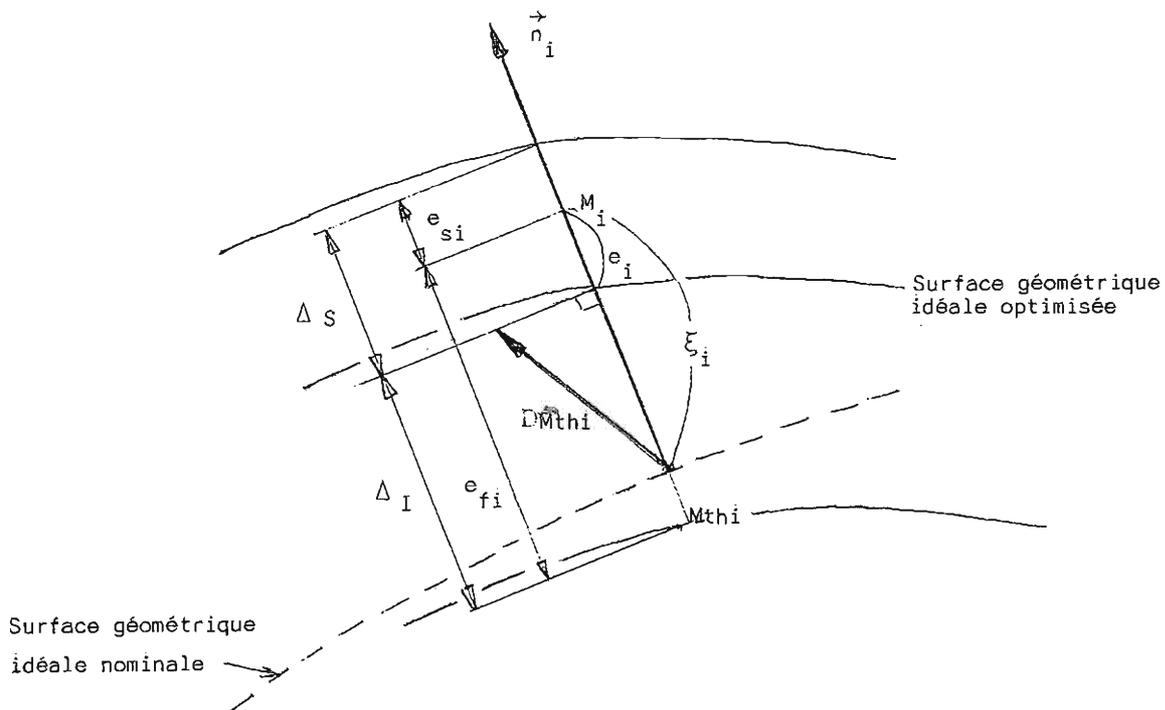
3.2 Méthode par programmation linéaire :

En chaque point de mesure on impose à l'écart optimisé $e_i = \xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]$ une contrainte supplémentaire d'appartenance à un domaine, tout en formulant une fonction objectif à minimiser ou à maximiser, par exemple, défaut de forme mini, plus petite ou plus grande surface enveloppe extérieure ou intérieure etc...

Cette formulation permet de résoudre par la méthode du simplexe toute surface. En effet, quel que soit le rang ou la complexité de la surface, le problème est mis dans tous les cas sous la forme canonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad Z = C.X \\ \text{avec} \quad A.X = B \\ \text{et} \quad X \geq 0 \quad \{X = x_1, x_2, \dots, x_k\} \end{array} \right. .$$

3.2.1 Fonction objectif : défaut de forme mini



La surface fabriquée est définie par l'ensemble des points palpés M_i .

On fait subir à la surface géométrique idéale nominale (définie comme passant par n points palpés avec $n < 6$) un petit déplacement de telle façon que l'ensemble des points palpés M_i restent entre deux surfaces enveloppes des sphères de rayons respectifs ΔS et ΔI et dont les centres sont situés sur la surface géométrique idéale optimisée [NF 83].

Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta S - e_i &\geq 0 \\ \Delta I - e_i &\leq 0\end{aligned}$$

avec comme fonction objectif le défaut de forme minimum : $\Delta S - \Delta I$ minimum.

$$\text{sachant que } e_i = \xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]$$

si p est le nombre de points de mesure, on obtient quelque soit la forme de la surface $2p$ inéquations linéaires que l'on résoud par la méthode du simplexe.

$$\begin{aligned}\Delta S - (\xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]) &\geq 0 \\ \Delta I - (\xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]) &\leq 0\end{aligned}$$

avec le défaut de forme $Z = \Delta S - \Delta I$ à minimiser.

On obtient le torseur de petit déplacement $(\alpha, \beta, \gamma, u, v, w)$ et par suite on calcule les écarts optimisés

$$e_i = \xi_i - [\mathcal{P}_i]_A \cdot [\tau_A]$$

suivant le critère défaut de forme mini.

3.2.1.1 Mise en équation détaillée dans le cas d'une surface de rang 6 (critère défaut de forme)

$$\text{Soit } [\zeta_A] \begin{cases} \alpha \cdot \vec{X} \\ \beta \cdot \vec{Y} \\ \gamma \cdot \vec{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} u \cdot \vec{X} \\ v \cdot \vec{Y} \\ w \cdot \vec{Z} \end{cases}$$

Pour tout point de mesure d'indice i on a :

$$[\mathcal{P}_i]_A \begin{cases} a_i \cdot \vec{X} \\ b_i \cdot \vec{Y} \\ c_i \cdot \vec{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} L_i = (y_i c_i - z_i b_i) \cdot \vec{X} \\ M_i = (z_i a_i - x_i c_i) \cdot \vec{Y} \\ N_i = (x_i b_i - y_i a_i) \cdot \vec{Z} \end{cases}$$

Soit

$$\Delta S - [\xi_i - (u a_i + v b_i + w c_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)] \geq 0$$

$$\Delta I - [\xi_i - (u a_i + v b_i + w c_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)] \leq 0$$

Le problème est composé de huit inconnues qui sont ΔS , ΔI , α , β , γ , u , v , et w .

Pour utiliser les algorithmes du simplexe mettons le problème sous la forme standard du type :

$$\text{Minimiser } Z = C \cdot X$$

$$Ax = B$$

$$X \geq 0 \text{ avec } X = (x_1, x_2 \dots x_k)$$

ce qui introduit des variables d'écarts :

$$\text{soit } \Delta S_1 - \Delta S_2 = \Delta S \text{ avec } \Delta S_1 > 0 \text{ et } \Delta S_2 \geq 0$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 = \Delta I \text{ avec } \Delta I_1 > 0 \text{ et } \Delta I_2 \geq 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha \text{ avec } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \geq 0$$

$$\beta_1 - \beta_2 = \beta \text{ avec } \beta_1 \text{ et } \beta_2 \geq 0$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma \text{ avec } \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \geq 0$$

$$u_1 - u_2 = u \text{ avec } u_1 \text{ et } u_2 \geq 0$$

$$v_1 - v_2 = v \text{ avec } v_1 \text{ et } v_2 \geq 0$$

$$w_1 - w_2 = w \text{ avec } w_1 \text{ et } w_2 \geq 0$$

le système à résoudre devient :

$$\text{minimiser } Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2$$

Pour tout point de mesure d'indice i on a :

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 + (u_1 - u_2)a_i + (v_1 - v_2)b_i + (w_1 - w_2)c_i + (\alpha_1 - \alpha_2)L_i + (\beta_1 - \beta_2)M_i + (\gamma_1 - \gamma_2)N_i - K_i = \xi_i$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 + (u_1 - u_2)a_i + (v_1 - v_2)b_i + (w_1 - w_2)c_i + (\alpha_1 - \alpha_2)L_i + (\beta_1 - \beta_2)M_i + (\gamma_1 - \gamma_2)N_i + T_i = \xi_i$$

Après résolution pour le simplexe on obtient :

le défaut de forme $\text{mini } \Delta S_1 - \Delta S_2 + \Delta I_1 - \Delta I_2$
le torseur des petits déplacements au point A

$$\text{les écarts optimisés } e_i = \xi_i - [\tilde{\chi}_A] \cdot [\mathcal{P}_I]_A$$

3.2.1.2 Application au contrôle d'une électrode laser :

Le profil théorique de l'électrode est définie par des équations qui déterminent à l'aide de paramètres variables, les points M_{thi} et leurs normales associées.

Equation du profil de l'électrode dans le repère (O,X,Y,Z):

$$\vec{OM}_i = \begin{cases} X = f(M) * \cos(\theta) \\ Y = g(M) \\ Z = f(M) * \sin(\theta) + I \end{cases}$$

$$\text{avec } f(M) = 10 * \left| \frac{M - K^2 * \text{sh}(M)}{\pi/2 + \text{Arcsin}(K) + k\sqrt{1-K^2}} \right|$$

$$\text{et } g(M) = 10 * \left| \frac{\pi/2 + \text{Arcsin}(K) + K\sqrt{1-k^2} \text{ch}(M)}{\pi/2 + \text{Arcsin}(K) + K\sqrt{1-K^2}} \right|$$

$$K = 0.01780295$$

$$\text{sh}(M) = (\exp(M) - \exp(-M)) / 2 ;$$

$$\text{ch}(M) = (\exp(M) + \exp(-M)) / 2$$

Equation de la normale au point M_i :

$$\vec{n}_i = (U/Q, V/Q, W/Q)$$

$$\text{avec } U = \frac{K \sqrt{1-K^2} * \text{sh}(M) * \cos(\theta)}{\sqrt{(1-K^2)^2 + K^2(\text{ch}(M)-1)^2}}$$

$$V = \frac{-(1-K^2) * \text{ch}(M)}{\sqrt{(1-K^2)^2 + k^2(\text{ch}(M)-1)^2}}$$

$$W = \frac{k \sqrt{1-k^2} * \text{sh}(M) * \sin(\theta)}{\sqrt{(1-K^2)^2 + K^2(\text{ch}(M)-1)^2}}$$

$$\text{Et } Q = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$$

Le paramètre M varie de -5.843353167 à +5.843353167
Ce qui correspond à Ymaxi = 19 mm.

Création des points Mthi de la surface géométrique idéale

Pour créer ces points, on choisit 5 valeurs de
M : 1,2.8,4,5 et 5.3.

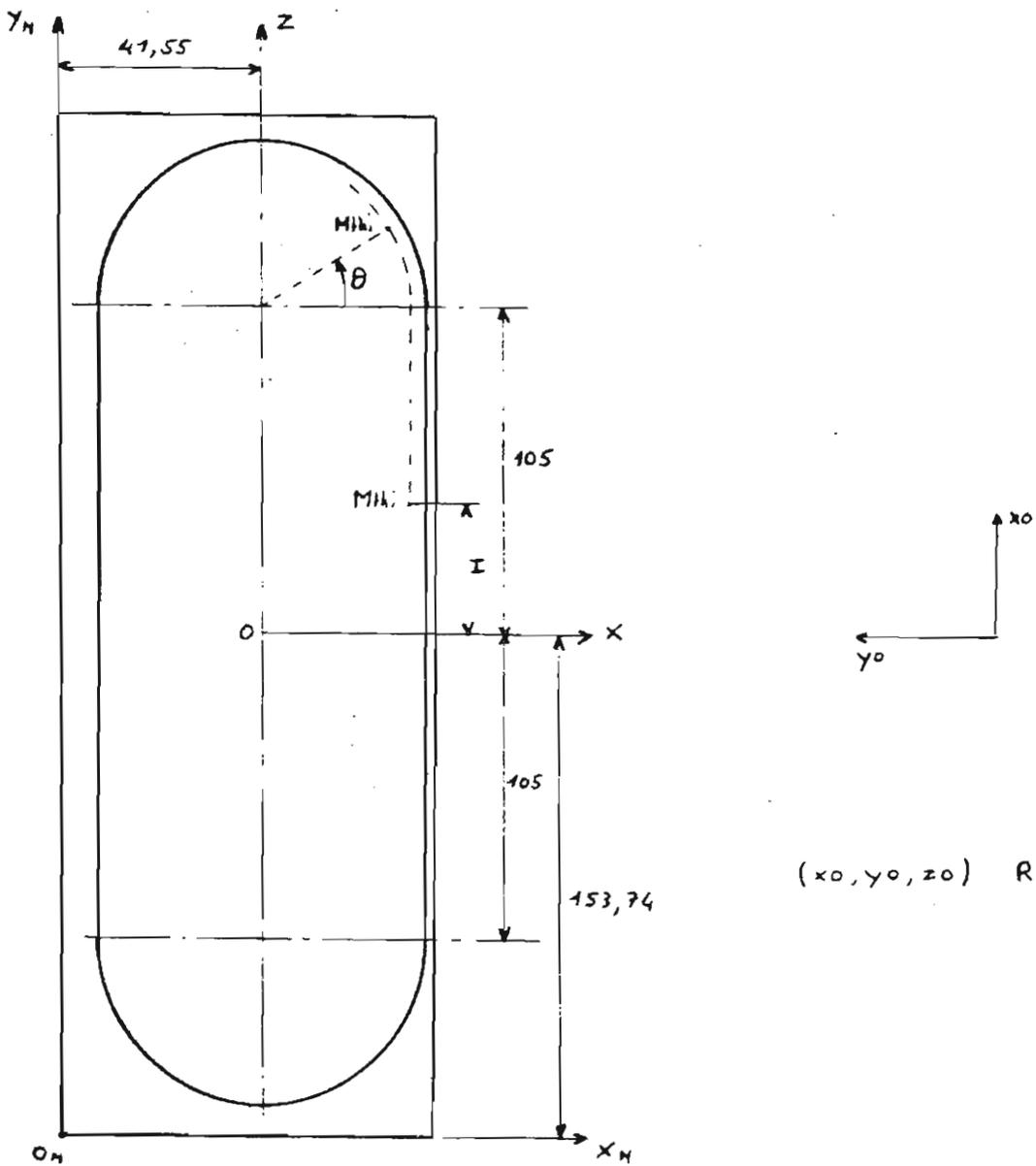
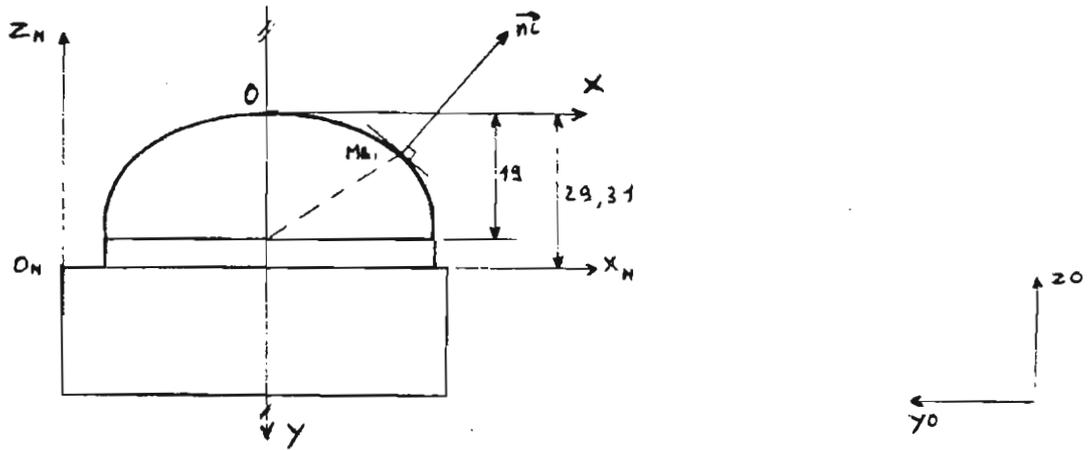
Pour une valeur de M donnée :

- I varie de -105 à +105 avec $\theta = 0^\circ$
- θ varie de 0° à 180° avec I = 105
- I varie de +105 à -105 avec $\theta = 180^\circ$
- θ varie de 180° à 360° avec I = -105

A partir de ces paramètres, on obtient le fichier
surface géométrique idéale comprenant 74 points théoriques
et leurs normales associées.

Par commande numérique d'une machine à mesurer
tridimensionnelle S.E.I.V. on vient palper la surface de
l'électrode suivant les normales \vec{n}_i passant par les points
théoriques Mthi. On relève alors les coordonnées des points
palpés Mi. On en déduit les écarts ξ_i mesurés.

Définition théorique de l'Electrode Laser :



(x_0, y_0, z_0) Repère Machine

Par la méthode du simplexe dont l'algorithme est défini en annexe A on obtient le torseur des petits déplacements exprimant au point O le petit déplacement à faire subir à la forme géométrique idéale nominale pour rendre le défaut de forme mini :

- les translations sont : $u = 0.01334$ mm
 $v = -0.07915$ mm
 $w = -0.03524$ mm

- Les rotations sont : $\alpha = -0.000040$ rd
 $\beta = 0.000073$ rd
 $\gamma = 0.000249$ rd

- Le défaut de forme vaut : $Df = 0.0505$ mm.

Si on compare ce résultat avec le défaut de forme nominale 0,14964 et le défaut de forme obtenu par les moindres carrés (0,055) on obtient respectivement une diminution de 63 % et de 8,2 % des défauts de forme.

D'autre part on peut affirmer que le défaut de forme ainsi trouvé, correspondant à un ensemble de points palpés donnés, est minimal, et répond bien à la norme internationale ISO 1101. Cette méthode devrait être acceptée par la majorité des métrologistes et par les institutions de standardisation.

3.3 Critère de petits déplacements :

La méthode générale proposée s'appuie sur une linéairalisation du déplacement de la surface géométrique idéale nominale, en considérant que le déplacement est très

petit. Il est donc nécessaire de définir un critère permettant de vérifier si le déplacement calculé par l'optimisation répond bien à l'hypothèse de petit déplacement.

3.3.1 Comparaison des écarts ξ_i , e_i et d_i :

On définit les trois écarts ξ_i , e_i et d_i de la façon suivante :

- ξ_i est l'écart nominal mesuré entre la surface fabriquée et la surface géométrique idéale nominale.
- e_i est l'écart optimisé, entre la surface fabriquée et la surface géométrique idéale optimisée, obtenu par:
- $e_i = \xi_i - [\mathcal{P}_i] \cdot [\mathcal{T}_i]$ aussi bien par la méthode de GAUSS que par la méthode du simplexe.
- d_i est la distance vraie entre la surface fabriquée et la surface géométrique idéale optimisée.

Si dans le cas de surface à géométrie simple, il est toujours possible de calculer les trois écarts ξ_i , e_i et d_i , dans le cas de surfaces complexes, le calcul exact des d_i est souvent impossible, on définit alors les écarts de forme par les e_i optimisés, en considérant que les différences entre d_i et e_i sont négligeables et du second ordre.

Vérifions cette hypothèse dans les cas simples où les distances d_i sont calculables et extrapolons les résultats au cas général de surfaces quelconques.

On définira ainsi le critère de petit déplacement C^*

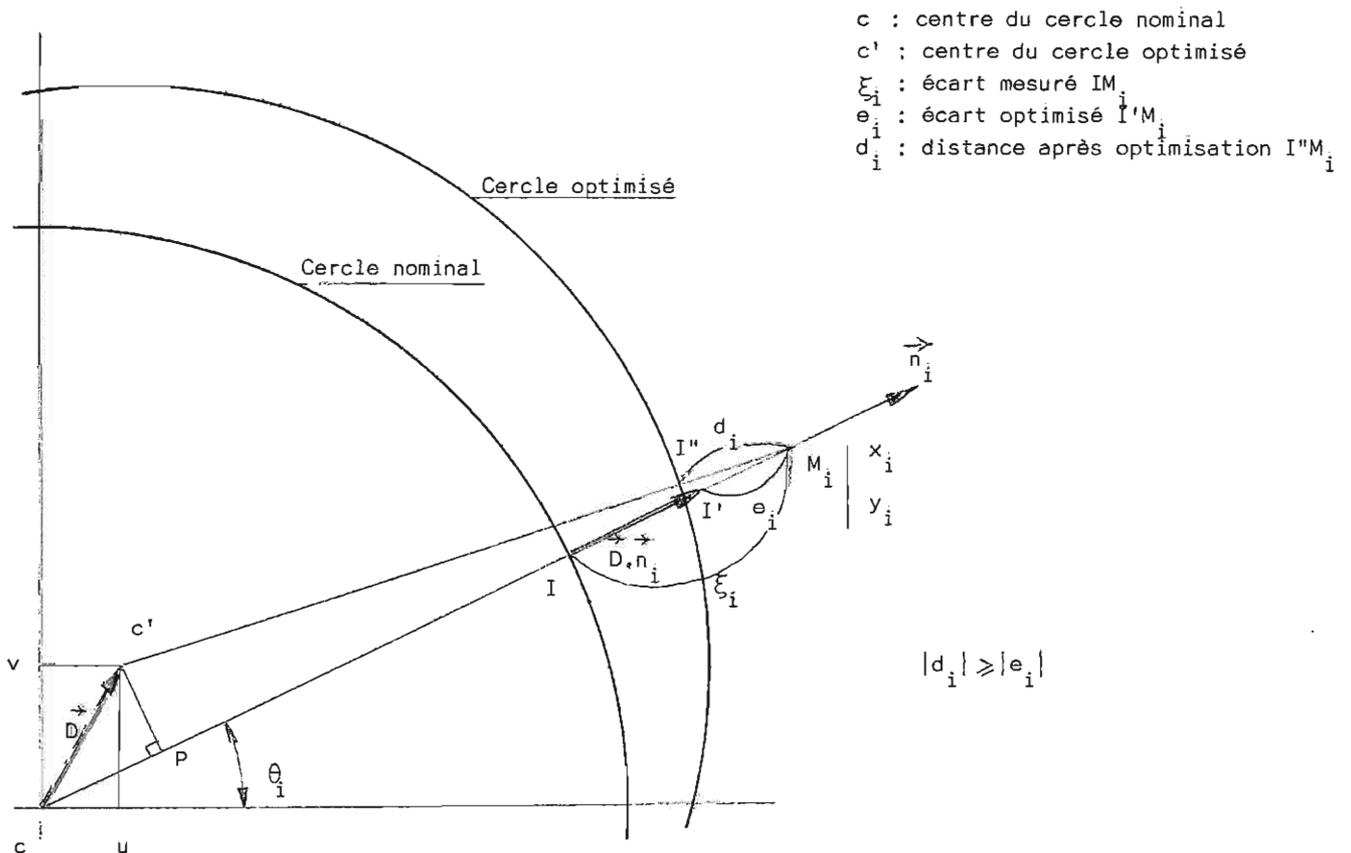
$$C^* = \text{Sup} \{d_i - e_i\}$$

3.3.2 Cas du cercle et de la sphère :

La méthode générale proposée optimise suivant GAUSS ou le simplexe les écarts e_i et non pas les distances d_i au cercle . Les différences entre les distances d_i et les écarts e_i permettent d'apprécier la précision de la méthode et par suite l'hypothèse des déplacements très petits.

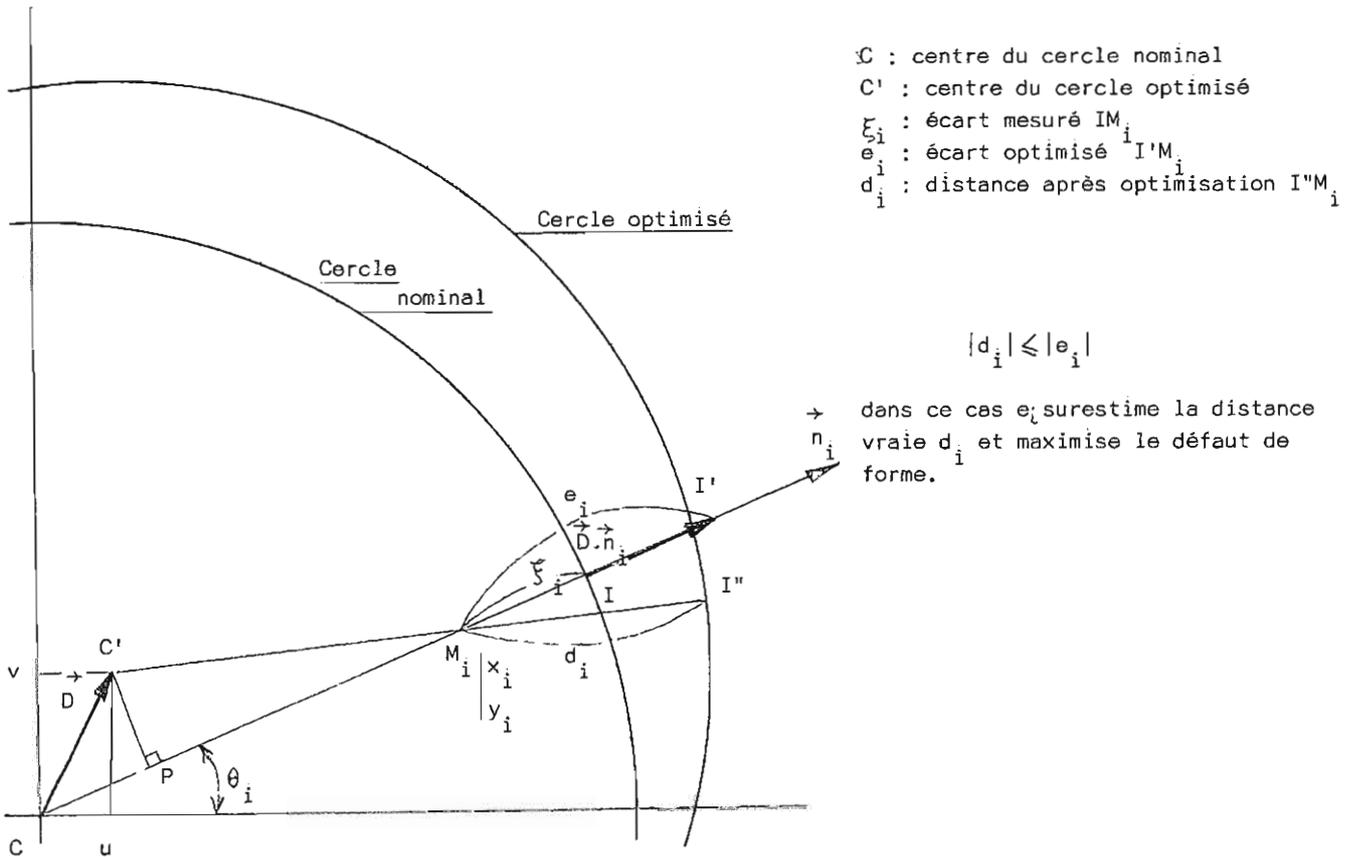
Deux cas de figure peuvent se présenter :

- Cas où d_i et e_i sont positifs (extérieurs au cercle optimisé).



dans ce cas e_i sous-estime la distance vraie d_i et minimise le défaut de forme.

- Cas ou d_i et e_i sont négatifs (intérieurs au cercle optimisé).



- dans les deux cas de figure on a en valeur algébrique avec R rayon du cercle nominal

$$d_i - e_i = [M_i C' - R] - [M_i C - CP - R]$$

(1) soit $d_i - e_i = M_i C' - M_i P$

L'optimalisation nous donne le déplacement CC' défini par ses composantes u et v, ce qui donne :

$$(1) d_i - e_i = \sqrt{(x_i - u)^2 + (y_i - v)^2} - [\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - u \cos \theta_i - v \sin \theta_i]$$

Plaçons nous dans le cas où la différence $d_i - e_i$ sera maximum, c'est-à-dire lorsque le déplacement \vec{D}_I est perpendiculaire à \vec{n}

soit $\theta_i = 0$ $u = 0$ $y_i = 0$
 en prenant $x_i = R + \xi_i$, on a :

$$(1) \quad (d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \sqrt{(R + \xi_i)^2 + v^2} - (R + \xi_i).$$

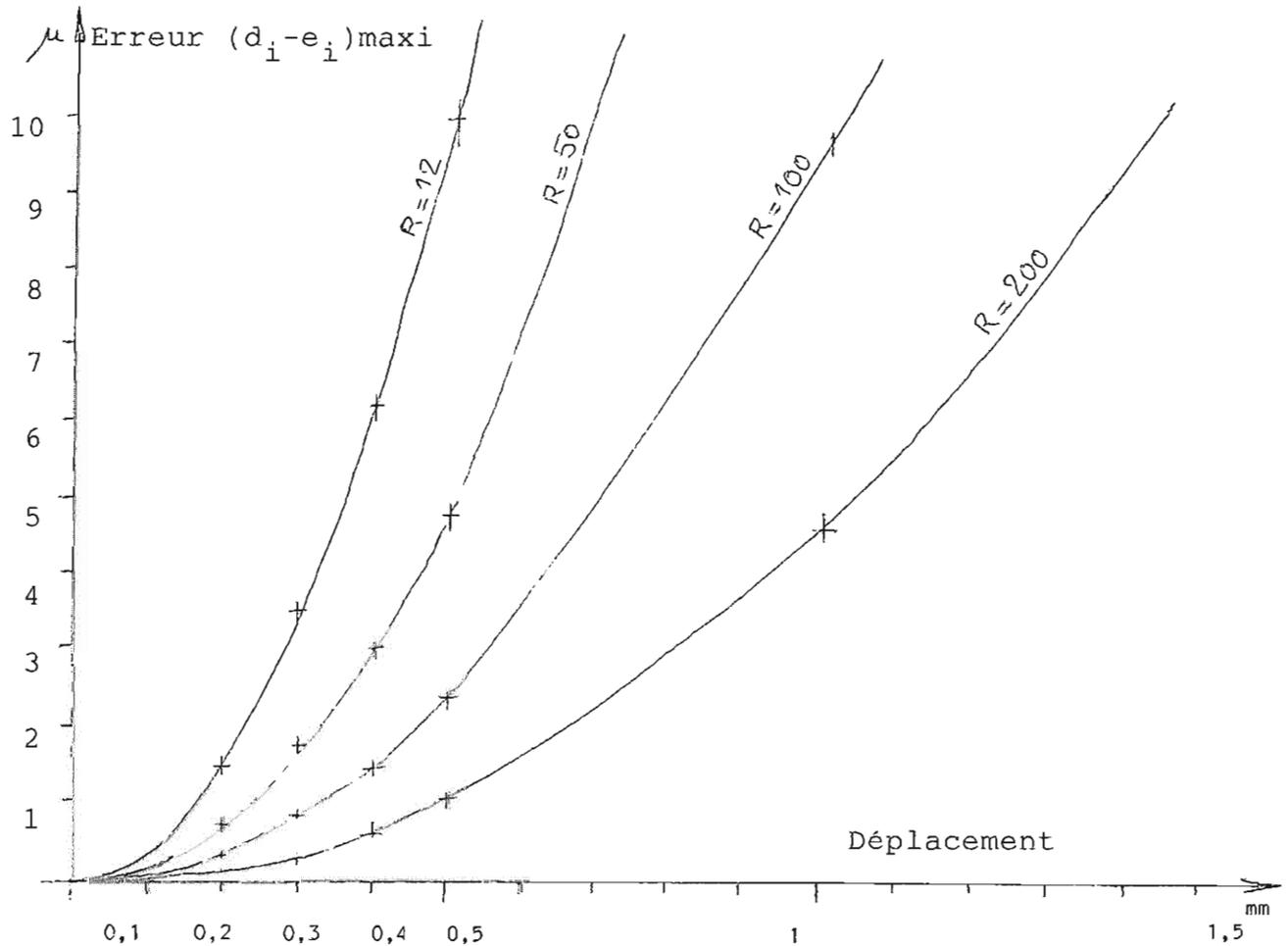
Ordre de grandeur des écarts maxi $d_i - e_i$ pour différentes valeurs du déplacement :

L'influence de ξ_i étant négligeable sur le résultat, on se place dans le cas défavorable de $\xi_i = 0$.

On obtient, en faisant varier le déplacement $|\vec{D}| = v$ de 0,01 à 4 mm pour 4 diamètres 24-50-100 et 200, les résultats suivants :

$ \vec{D} = v =$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2	4
$\phi = 24$ $R = 12$	$4 \cdot 10^{-6}$	0,0001	0,0004	0,0016	0,0037	0,0066	0,0104	0,041	0,093	0,165	0,6
$\phi = 50$ $R = 25$	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00005	0,0002	0,0008	0,0018	0,0032	0,005	0,02	0,045	0,0798	0,3
$\phi = 100$ $R = 50$	10^{-6}	0,000025	0,0001	0,0004	0,0009	0,0016	0,0025	0,01	0,0225	0,0399	0,1
$\phi = 200$ $R = 100$	$0,5 \cdot 10^{-6}$	$12,5 \cdot 10^{-6}$	0,00005	0,0002	0,00045	0,0008	0,00125	0,0049	0,0112	0,0199	0,0
Erreur $< 1\mu$						Erreur $> 1\mu$					

Soit le réseau de courbes donnant l'erreur maxi $(d_i - e_i)$ en fonction du déplacement $|\vec{D}|$ du centre du cercle.



En effectuant un développement limite de:

$$[(R + \xi_i)^2 + v^2]^{1/2}$$

et en prenant $\xi_i = 0$, l'expression (1) devient :

$$(1) \quad (d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \frac{v^2}{2R}$$

Dans le cas où le système d'axes choisis donne une composante u différente de zéro, on obtient l'erreur maxi suivant la direction \vec{n} perpendiculaire au déplacement \vec{D} de module $\sqrt{u^2 + v^2}$, soit pour un cercle complet :

$$(d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \frac{v^2 + u^2}{2R}$$

Dans le cas de la sphère complète, on aurait de la même façon, en se plaçant dans le plan M_i, C, C' l'erreur maxi donnée par la formule

$$(d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2R}$$

L'erreur en tout point M_{thi} appartenant à un cercle ou à une sphère peut être définie de la façon suivante :

si D_{pi}^{\rightarrow} est le déplacement $\vec{D}(u, v, w)$ du centre du cercle ou de la sphère projeté dans le plan perpendiculaire à $\vec{n}_i(a_i, b_i, c_i)$ on a en tout point M_{thi} l'écart ϵ_i :

$$\epsilon_i = (d_i - e_i) = \frac{|D_{pi}^{\rightarrow}|^2}{2R}$$

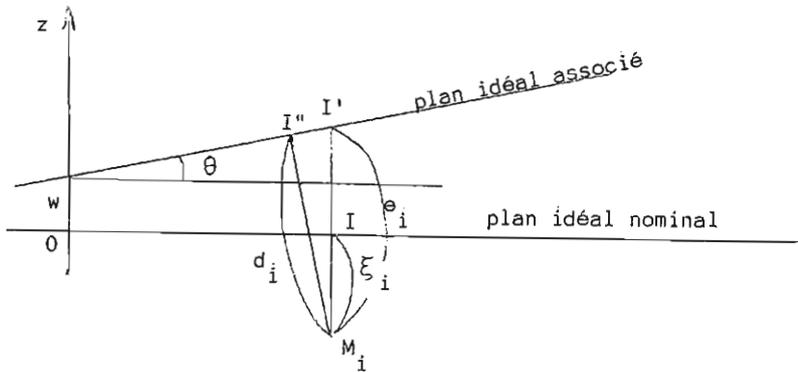
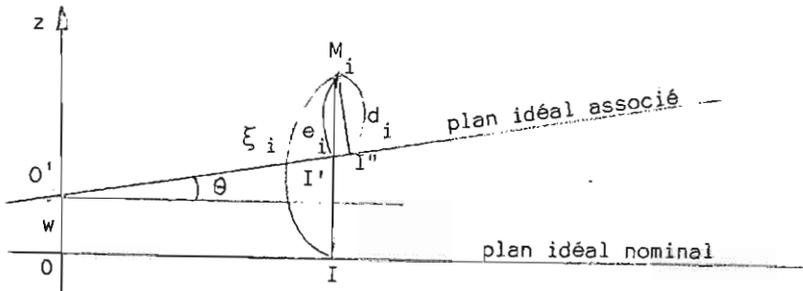
Soit :

$$\epsilon_i = |d_i - e_i| = \frac{u^2 + v^2 + w^2 - (a_i u + b_i v + c_i w)^2}{2R}$$

Dans le cas où R tend vers l'infini ϵ_i tend vers zéro. La surface étudiée devient un plan.

3.3.3 Cas du plan :

Si w est la translation au point O et θ l'angle de rotation caractérisant le torseur de petits déplacements au point O du plan idéal optimisé par GAUSS ou par le simplexe, on a les figures suivantes :



avec ξ_i écart mesuré $M_i I$

e_i écart optimisé $e_i = \xi_i - w - OI \cdot \theta$

d_i distance vraie au plan idéal optimisé $M_i I''$

La différence entre d_i et e_i est dans tous les cas de figure

$$d_i - e_i = - e_i (1 - \cos \theta)$$

Cette différence est toujours négative, et par suite les écarts e_i surestiment les distances vraies.

Ordre de grandeur des valeurs de la différence $d_i - e_i$, pour un écart e_i de 1mm.

θ	0,5°	1°	1,5°	2°	2,5°	3°	4°
$d_i - e_i$	- 0,038 μ	- 0,15 μ	- 0,34 μ	- 0,6 μ	- 0,95 μ	1,37 μ	2,4 μ
	Erreur < 1 μ					Erreur > 1 μ	

On peut considérer que cette erreur est dans tous les cas, négligeable ; en effet une rotation de 2°5 correspond déjà à un défaut de 1 mm sur une longueur de 23 mm, défaut jamais atteint dans le cas de pièces mécaniques.

3.3.4 Cas général :

Une surface quelconque peut être définie en tout point M_{thi} par sa normale $\vec{n}_i (a_i, b_i, c_i)$ et par une sphère osculatrice de centre C_i et de rayon R_i . Par la méthode d'optimisation proposée, on peut calculer le déplacement du centre C_i .

$$\vec{D}_{C_i} = \vec{D}_O + \vec{C_i O} \wedge \vec{R}$$

On obtient ainsi les 3 composantes u_i , v_i et w_i du déplacement Dc_i

La différence ϵ_i entre la distance vraie d_i et l'écart optimisé e_i sera celle trouvée dans le cas de la sphère :

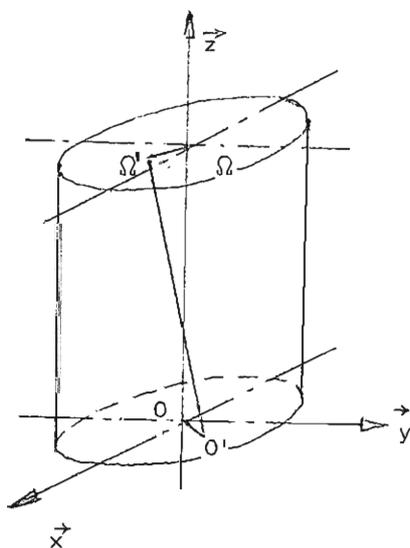
soit
$$\epsilon_i = |d_i - e_i| \leq \frac{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 - (u_i a_i + v_i b_i + w_i c_i)^2}{2R_i}$$

On en déduit immédiatement le critère de petit déplacement $C^* = \sup \{\epsilon_i\}$

Dans la pratique si celui-ci reste inférieur à 10^{-1} de la précision désirée on considère que la méthode appliquée a donné un bon résultat, et que le torseur exprime bien un petit déplacement.

3.3.5 Application de la formule générale au cylindre complet :

La sphère osculatrice de rayon R^* a son centre sur l'axe du cylindre. La différence $(d_i - e_i)$ sera maxi pour le déplacement maxi du centre de la sphère osculatrice, soit dans le plan z maxi ou le plan z mini de cote z .



L'optimisation du torseur des petits déplacements donne :

$$[\tilde{\tau}]_o \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{cases}$$

soient les déplacements :

du point Ω

$$\vec{D}_\Omega \begin{cases} (u+z\beta) \vec{x} \\ (v-z\alpha) \vec{y} \end{cases}$$

du point O

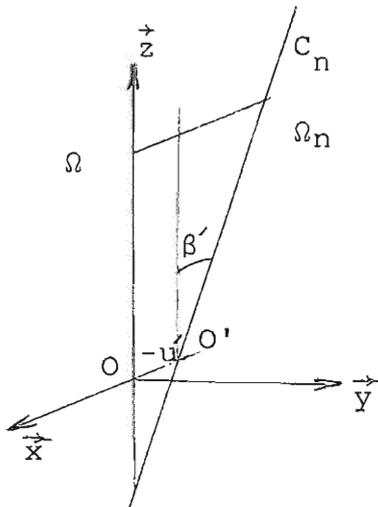
$$\vec{D}_o \begin{cases} u \vec{x} \\ v \vec{y} \end{cases}$$

La différence $(d_i - e_i)$ maxi est :

$$(d_i - e_i)_{\text{maxi}} \leq \frac{\text{Sup} \{ [(u+z \cdot \beta)^2 + (v-z \cdot \beta)^2] ; [u^2 + v^2] \}}{2R^*}$$

Vérification expérimentale :

En prenant un cylindre C_0 parfait de rayon R on lui associe un cylindre nominal C_n dont l'axe fait un angle β' avec l'axe du cylindre C_0 . Cet axe est translaté suivant \vec{x} de $-u'$. On calcule alors pour le point le plus défavorable :



- a) l'écart mesuré : ξ_i
- b) l'écart optimisé e_i par la méthode proposée
- c) la distance exacte d_i

Les résultats sont transcrits dans le tableau suivant :

avec l'estimation de $(d_i - e_i)_{\text{maxi}} = \frac{(u+z \cdot \beta)^2}{2R^*}$

	Angle β' exact	Déplacement u' exact	Torseur Optimisé	ξ_i mesure	e_i optimisé	d_i	$(d_i - e_i)'$ maxi exact	$(d_i - e_i)$ maxi estimé	Déplacement de Ω $u' + z. \beta'$
100 mm hauteur rayon 50	0°	$u' = 0,2$	$\beta = 0$ $u = 0,1999984$	0,00039998	0,00039998	0	0,0003999	0,0003999	0,2
hauteur rayon	atn 2/100 1,145°	$u' = -2$	$\beta = 0,019885$ $u = 1,9986031$	0,159712	0,1581828	$1,00210^{-6}$	0,158183	0,158976	3,987
Cylindre	atn 0,3/100	$u' = 0$	$\beta = 0,0029999$ $u = -7$ 0,610	0,00089998	0,00089993	210^{-6}	0,00089993	0,00089996	0,2999
	2°	$u' = 0$	$\beta = 0,034815$ $u = 0,001057$	0,1216495	0,120695	$1,3410^{-6}$	0,120696	0,12128	3,4826
hauteur 25 mm rayon 10	atn 2/25 4,5739°	$u' = 0$	$\beta = 0,078387$ $u = 0,00019624$	0,19679	0,18551846	0,000088	0,1856	0,19240	1,96

On remarque :

1°)- que la valeur estimée de $(d_i - e_i)$ est une bonne approximation de $(d_i - e_i)'$ réel ; moins de 3 % de surestimation pour un angle de 4°57.

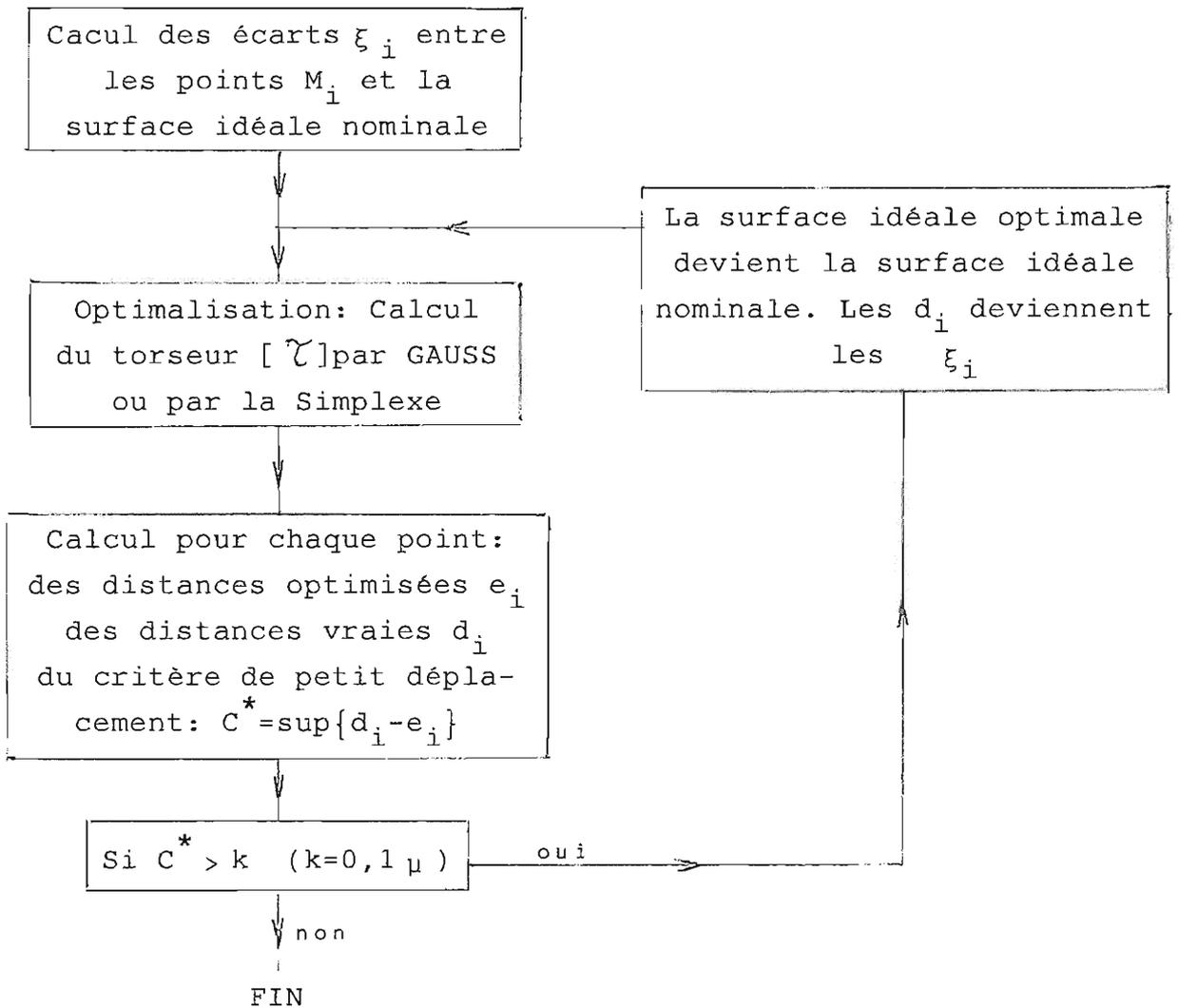
2°)- que sur le plan pratique, la valeur de e_i optimisée peut être éloignée de la valeur d_i recherchée, (plusieurs dixièmes de millimètres), ainsi le critère $C^* = \sup \{d_i - e_i\}$ permet de valider l'hypothèse du torseur de petit déplacement.

3.4 Intégration du critère de petit déplacement dans la méthode générale proposée :

- 1 - Dans le cas du plan et de la droite, on considère que e_i est une très bonne approximation des distances d_i .

- 2 - Dans tous les cas où l'on peut calculer la distance d_i entre les points de mesure w_i et la surface optimisée, on suit l'algorithme suivant :

Mesure des points M_i



- 3 - Dans le cas de surfaces complexes où tout calcul de distance d_i est impossible, on estime à partir du déplacement (u_i, v_i, w_i) du centre de la sphère osculatrice de rayon R_i , les différences ϵ_i :

$$\epsilon_i = d_i - e_i = \frac{u_i^2(1-a_i^2) + v_i^2(1-b_i^2) + w_i^2(1-c_i^2)}{2R_i}$$

Si le critère de petit déplacement $C^* = \sup \{\epsilon_i\}$ est inférieur à quelques microns, on considère que les e_i sont une estimation suffisante des d_i . Dans le cas contraire on peut procéder de deux façons.

- Soit faire subir à la pièce, un déplacement réel correspondant au torseur du petit déplacement, puis recommencer une série de mesures et de calculs.
- Soit donner un résultat plus précis en ajoutant aux valeurs des e_i calculées, les accroissements ϵ_i estimés :

$$e_i = e_i + \epsilon_i$$

dans ce cas le critère d'optimisation répartition Gaussienne, ou minimisation de la fonction objectif, n'est plus respecté sur les nouveaux écarts e_i .

CHAPITRE IV

IV - ETUDE DETAILLEE DE L'ASSOCIATION D'UNE SURFACE GEOMETRIQUE IDEALE A UNE SURFACE PALPEE DANS LES CAS DE LA DROITE DU PLAN DE LA SPHERE DU CYLINDRE ET DU CONE

4.0 Présentation de l'étude détaillée

Nous nous sommes placés dans le cas général d'une mesure effectuée sur machine à mesurer tridimensionnelle. La surface à identifier est connue par l'ensemble des coordonnées des centres J_i de la sphère de palpation lorsque celle-ci est venue en contact avec la surface à mesurer, ces coordonnées sont exprimées dans le repère de la machine à mesurer. On suit alors les étapes suivantes :

Première étape :

Définition de la surface géométrique idéale nominale, celle-ci passe par des points J_i privilégiés, elle peut être également définie par une approche statistique. Dans tous les cas on lui attache, une origine et une direction \vec{n} privilégiée, qui permettront de définir un changement d'axes amenant chaque cas de surface étudiée sous une forme canonique centrée sur le système d'axe de mesure de la machine à mesurer.

Deuxième étape :

Par changement d'axes la surface géométrique idéale nominale et les points J_i de mesure sont centrés sur le système d'axe ox, oy, oz de la machine à mesurer, on obtient ainsi l'ensemble des points M_i .

Troisième étape :

Pour tout point M_i on calcul le point théorique M_{thi} correspondant à la surface géométrique idéale nominale ainsi que la normale n_i et l'écart de mesure ξ_i .

Quatrième étape :

On cherche à optimiser la surface géométrique idéale nominale par rapport aux points mesurés en lui faisant subir un petit déplacement répondant à un critère d'optimisation.

Les mises en équations ont été détaillées pour les quatre critères :

- critère de Gauss
- critère de défaut de forme mini
- critère de plus grande surface tangente intérieure
- critère de plus petite surface tangente extérieure.

On obtient dans chaque cas le torseur de petits déplacements optimum.

Cinquième étape :

On définit la surface géométrique idéale associée en faisant subir aux points de définition de la surface géométrique idéale nominale le petit déplacement trouvé à l'étape précédente.

Par rotation et translation inverse de celles effectuées à la deuxième étape on connaît alors la surface géométrique idéale associée aux points J_i centres de la sphère de palpation. Il ne reste plus qu'à tenir compte du sens d'accostage de la machine et du rayon de la sphère de palpation pour obtenir la surface géométrique idéale associée aux points mesurés sur la surface.

Cette étude se termine par le calcul du critère C^* de petits déplacements permettant de vérifier la validité de l'optimisation.

Pour plus de clarté nous avons disposé les calculs sous forme de tableaux, chaque tableau correspond à une des étapes décrites ci-dessus.

4.1 Définition de la surface géométrique idéale nominale

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Les points palpés étant connus par les centres J_i de la sphère de palpage la surface géométrique idéale nominale est définie par :	Définition d'une origine et d'une direction permettant de calculer les matrices de changement d'axes	
		Origine (xyz)	\vec{n} (abc)
Droite	Les 2 points J_1, J_2 les plus éloignés de la droite palpée	J_1	$\vec{J}_1 J_2$ normés
Plan	2 points J_1, J_2 les plus éloignés suivant les 3 axes ox, oy, oz . Le point J_3 est le plus éloigné de la droite $J_1 J_2$	J_1	$\vec{n} = \frac{\vec{J}_1 J_2 \wedge \vec{J}_1 J_3}{ \vec{J}_1 J_2 \wedge \vec{J}_1 J_3 }$
Cercle	2 points J_1, J_2 les plus éloignés suivant les 3 axes ox, oy, oz 3ème point J_3 le plus éloigné de la droite $J_1 J_2$	Centre du cercle 0	$\vec{n} = \frac{\vec{J}_1 J_2 \wedge \vec{J}_1 J_3}{ \vec{J}_1 J_2 \wedge \vec{J}_1 J_3 }$
Sphère	Le centre de la sphère $O(x_0, y_0, z_0)$: le premier point ayant l'indice 1 les (N-1) autres points l'indice i donnent par la méthode de GAUSS	Rayon $R = OJ_1$	$\vec{n} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$
		Centre de la sphère $O(x_0, y_0, z_0)$	

$2 \sum (x_1 - x_i)^2$	$2 \sum (y_1 - y_i)(x_1 - x_i)$	$2 \sum (z_1 - z_i)(x_1 - x_i)$	$\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{vmatrix}$
$2 \sum (x_1 - x_i)(y_1 - y_i)$	$2 \sum (y_1 - y_i)^2$	$2 \sum (z_1 - z_i)(y_1 - y_i)$	
$2 \sum (x_1 - x_i)(z_1 - z_i)$	$2 \sum (y_1 - y_i)(z_1 - z_i)$	$2 \sum (z_1 - z_i)^2$	

avec

$$K_1 = \sum (x_1 - x_i)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \sum x_i^2(x_1 - x_i) - \sum y_i^2(x_1 - x_i) - \sum z_i^2(x_1 - x_i)$$

$$K_2 = \sum (y_1 - y_i)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \sum x_i^2(y_1 - y_i) - \sum y_i^2(y_1 - y_i) - \sum z_i^2(y_1 - y_i)$$

$$K_3 = \sum (z_1 - z_i)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \sum x_i^2(z_1 - z_i) - \sum y_i^2(z_1 - z_i) - \sum z_i^2(z_1 - z_i)$$

Rayon de la sphère nominale $R = OJ_1$

Nature de la surface géométrique idéale nominale	les points palpés étant connus par les centres J_i de la sphère de palpée la surface géométrique idéale nominale est définie par :	Définition d'une origine et d'une direction permettant de calculer les matrices de changement d'axes	
		Origine (xyz)	\vec{n} (abc)
Cylindre	<p>Une direction approximative de l'axe \vec{n} est connue</p> <p>Le cercle passant par 3 des points projetés dans un plan perpendiculaire à \vec{n}. (On utilise la matrice de rotation définie par \vec{n}).</p> <p>On choisit les deux points J_1 et J_2 les plus éloignés suivant les axes \vec{ox} et \vec{oy}, le troisième point J_3 est le plus éloigné de la droite $J_1 J_2$.</p>	<p>Un point 0 de l'axe est défini par l'intersection des 2 médiatrices de $J_1 J_2$ et de $J_2 J_3$ dans le plan parallèle à \vec{xy}. La coordonnée z_0 est l'inf. des z_i</p>	\vec{n}
Cône	<p>Une direction approximative de l'axe \vec{n} connue.</p> <p>On choisit le cône d'axe de direction \vec{n} et passant par n points</p> <p>Soit :</p> <p>Le sommet S (x_s, y_s, z_s)</p> <p>1/2 angle au sommet $\text{tg } \alpha = K$</p> <p>En prenant $x_1=0 \quad y_1=0 \quad z_1=0$ et \vec{n} parallèle à \vec{z} on a pour $2 < i < n$</p> $\begin{vmatrix} 2 \sum x_i^2 & 2 \sum x_i y_i & -2 K^2 \sum x_i z_i \\ 2 \sum x_i y_i & 2 \sum y_i^2 & -2 K^2 \sum y_i z_i \\ -2 \sum x_i z_i & -2 \sum y_i z_i & 2 K^2 \sum z_i^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{vmatrix}$ <p>Avec</p> $K_1 = \sum x_i^3 + \sum x_i y_i^2 - K^2 \sum x_i z_i^2$ $K_2 = \sum y_i x_i^2 + \sum y_i^3 - K^2 \sum y_i z_i^2$ $K_3 = -\sum z_i x_i^2 - \sum z_i y_i^2 + K^2 \sum z_i^3$ <p>et $x_s^2 + y_s^2 - K^2 z_s^2 = 0$</p> <p>Soit 4 équations à 4 inconnues que l'on résoud (annexe</p>	<p>Sommet S du cône</p> $S \begin{cases} S_x \\ S_y \\ S_z \end{cases}$	\vec{n}

4.2 Définition des matrices de changement d'axes :

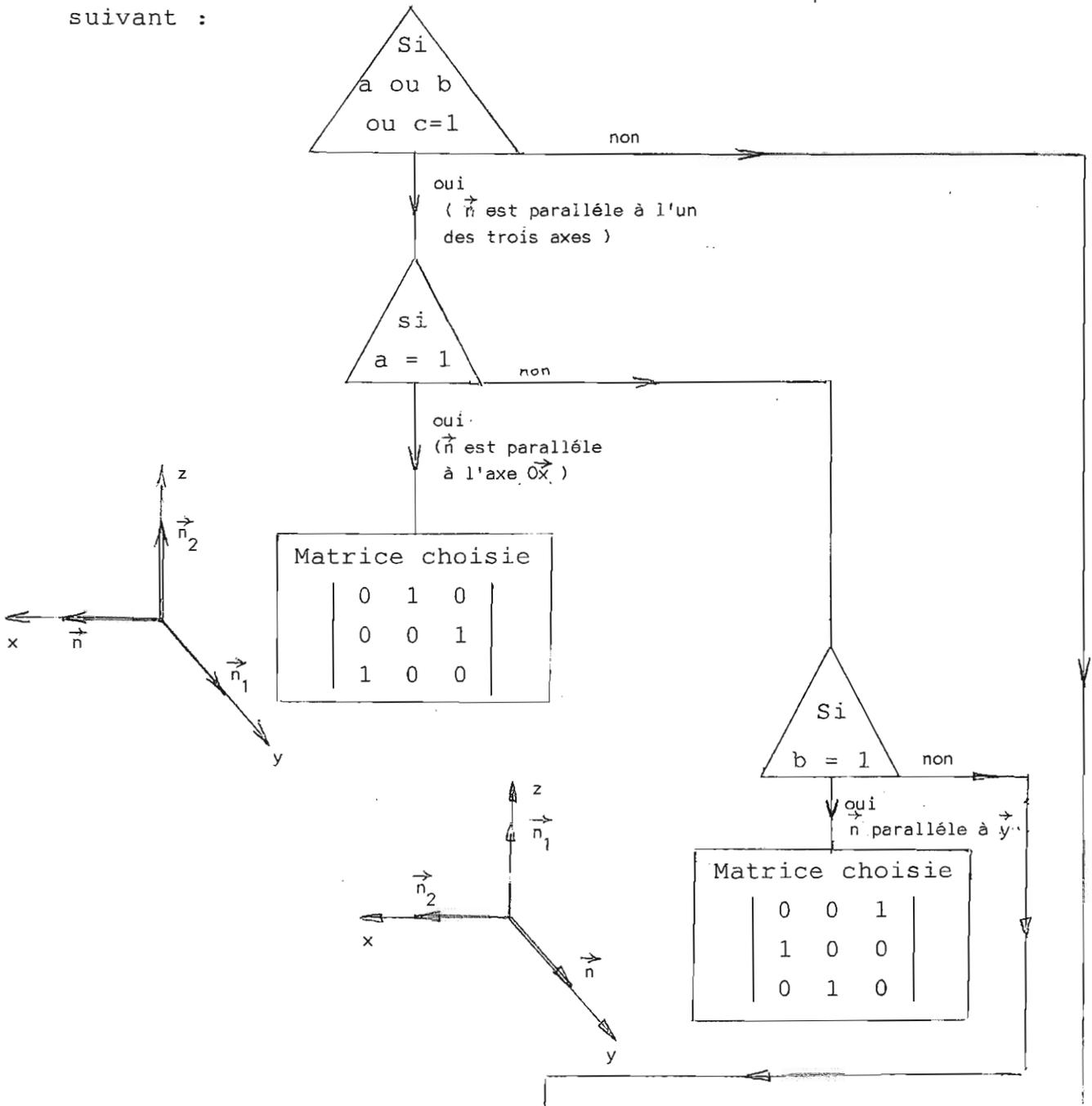
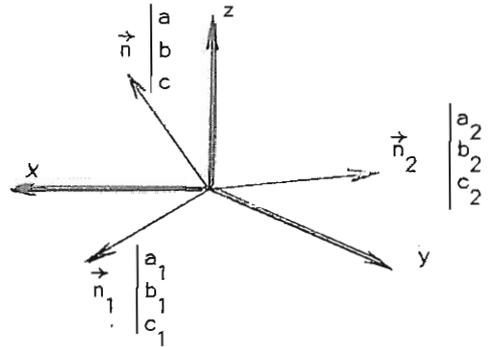
L'origine (x,y,z) et la direction \vec{n} (a,b,c) définis précédemment permettent de ramener le cas étudié sous une forme canonique centrée sur le système d'axes de mesure. Pour cela on effectue un changement d'axes défini par :

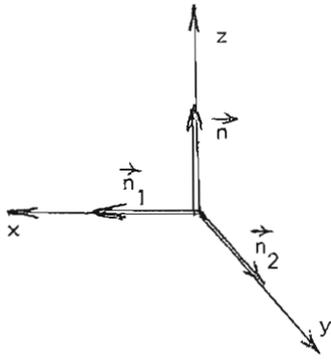
la matrice de translation $T \begin{vmatrix} -x & -y & -z \end{vmatrix}$

la matrice de rotation R

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

la normale \vec{n} étant connue par ses cosinus directeurs a,b,c , la matrice R est définie par l'algorithme général suivant :





Matrice choisie

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Si a ou b ou $c=0$ \vec{n} est parallèle à un des plans de projection

non

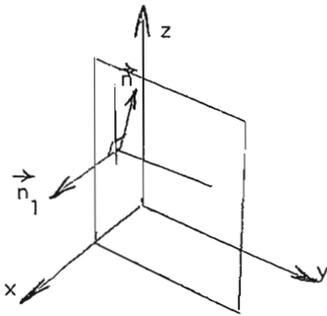
oui

Si $a = 0$

non

oui

\vec{n} parallèle à \vec{y} \vec{z}



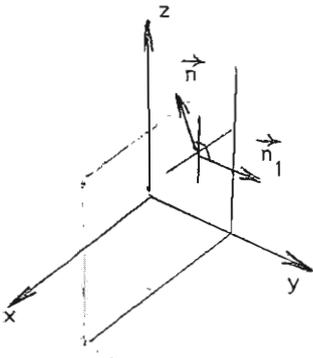
$a_1 = 1$
 $b_1 = c_1 = 0$

Si $b = 0$

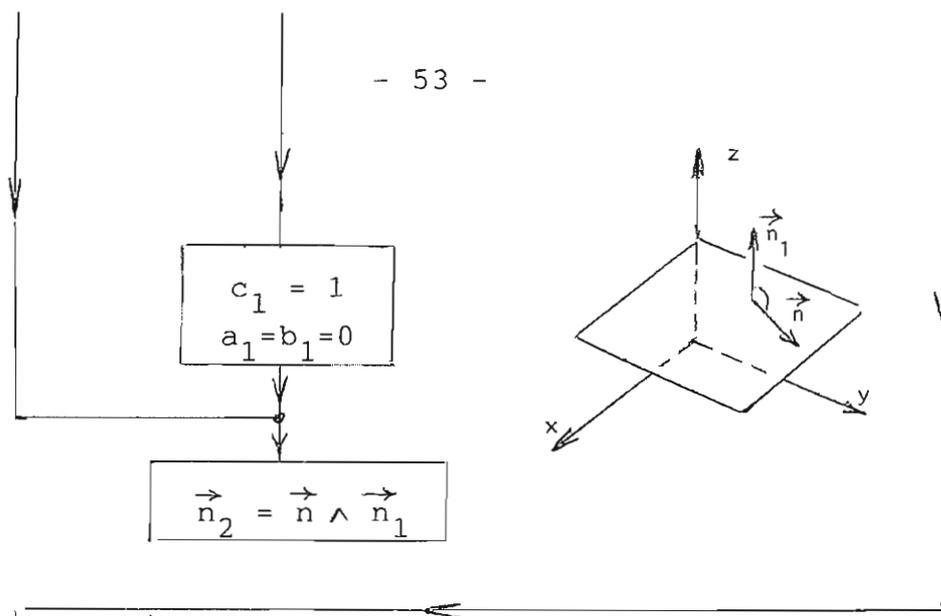
non

oui

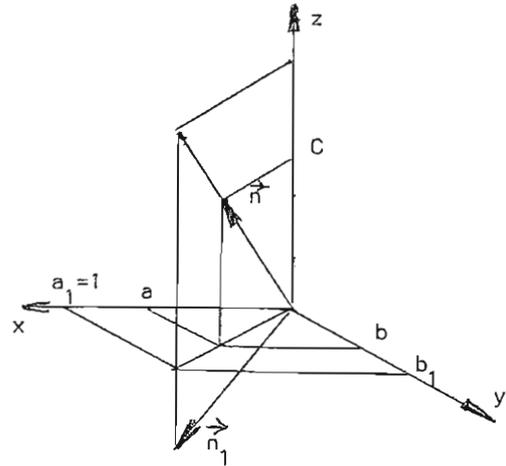
\vec{n} parallèle à \vec{x} \vec{z}



$b_1 = 1$
 $c_1 = a_1 = 0$



cas où \vec{n} a une direction quelconque



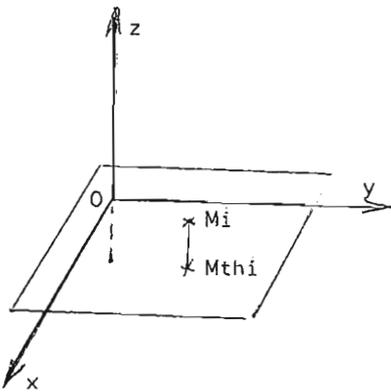
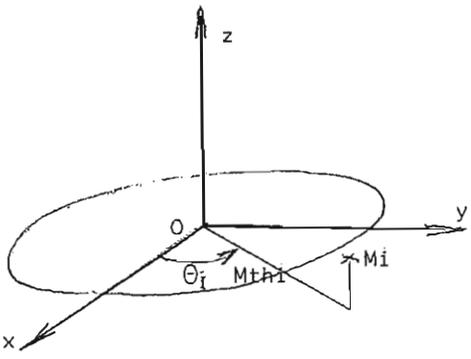
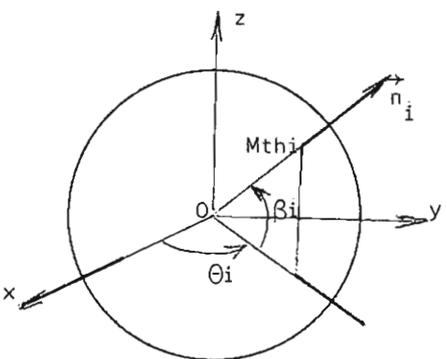
$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 \\
 b_1 &= b/a \\
 c_1 &= (-a - b^2/a)/c \\
 R &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \\
 a_1 &= \frac{a_1}{R} \quad b_1 = \frac{b_1}{R} \quad c_1 = \frac{c_1}{R}
 \end{aligned}$$

On choisit \vec{n}_1 dans le plan $\vec{z} \vec{n}$
 soit $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b}{a}$
 avec $a_1 = 1 \quad b_1 = \frac{b}{a}$
 d'autre part, $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$
 $a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1 = 0$
 et $c_1 = \frac{-a - b^2/a}{c}$

4.3 Calcul à partir des points M_i : des points théoriques M_{thi} , des normales n_i , des écarts ξ_i correspondants.

Les points M_i sont obtenus après translation et rotation des points J_i de mesures pour amener la surface géométrique idéale nominale centrée sur le système d'axes $\vec{o}\vec{x}$ $\vec{o}\vec{y}$ $\vec{o}\vec{z}$ de la machine à mesurer.

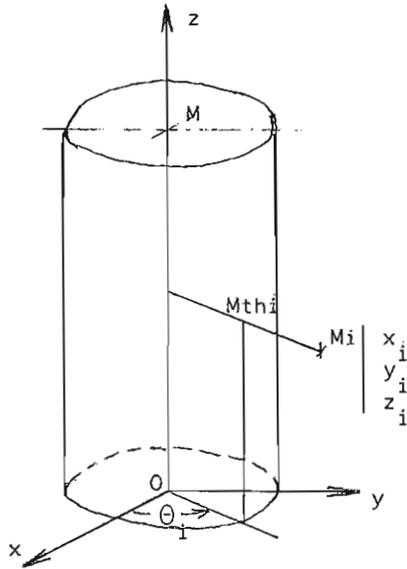
Nature de la surface géométrique idéale nominale	Un point de mesure M_i étant défini par x_i, y_i, z_i la surface géométrique idéale nominale et les écarts de mesure ξ_i sont définis par :	
Droite	2 points : origine et M_2	
A) Rectitude dans le plan $\vec{y}\vec{z}$		$\xi_{i1} = x_i$ $\vec{n}_{i1} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $Mth_{1i} \begin{vmatrix} 0 \\ y_i \\ z_i \end{vmatrix}$
B) Rectitude dans un parallélépipède parallèle aux plans $\vec{y}\vec{z}$ et $\vec{x}\vec{y}$		$\xi_{i1} = x_i \quad \xi_{i2} = y_i$ $\vec{n}_{i1} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{n}_{i2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $Mth_{1i} \begin{vmatrix} 0 \\ y_i \\ z_i \end{vmatrix} \quad Mth_{2i} \begin{vmatrix} x_i \\ 0 \\ z_i \end{vmatrix}$
C) Rectitude dans un cylindre d'axe \vec{z}		$\xi_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ $\vec{n}_i \begin{cases} \cos \theta_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \\ \sin \theta_i = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \end{cases}$ $Mth_i \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z_i \end{vmatrix}$

Nature de la surface Géométrie idéale nominale	Un point de mesure M_i étant défini par x_i, y_i, z_i la surface géométrique idéale nominale et les écarts de mesure ξ_i sont définis par :	
Plan	 $\xi_i = z_i$ $\vec{n}_i \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$ $Mth_i \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases}$	
Cercle	Centre O	Rayon R  $\xi_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - R$ $\vec{n}_i \begin{cases} \cos \theta_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \\ \sin \theta_i = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \end{cases}$ $Mth_i \begin{cases} R \cos \theta_i \\ R \sin \theta_i \end{cases}$
Sphère	Centre O	Rayon R  $\xi_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} - R$ $\vec{n}_i \begin{cases} \cos \beta_i \cos \theta_i \\ \cos \beta_i \sin \theta_i \\ \sin \beta_i \end{cases}$ $Mth_i \begin{cases} R \cos \beta_i \cos \theta_i \\ R \cos \beta_i \sin \theta_i \\ R \sin \beta_i \end{cases}$ <p>avec $\sin \theta_i = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$ $\sin \beta_i = \frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}$</p> $\cos \theta_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$ $\cos \beta_i = \frac{x_i^2 + y_i^2}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}$

Nature de la surface
géométrique idéale
nominale

Un point de mesure M_i étant défini par x_i, y_i, z_i
la surface géométrique idéale nominale et les écarts de mesure ξ_i
sont définis par :

Cylindre

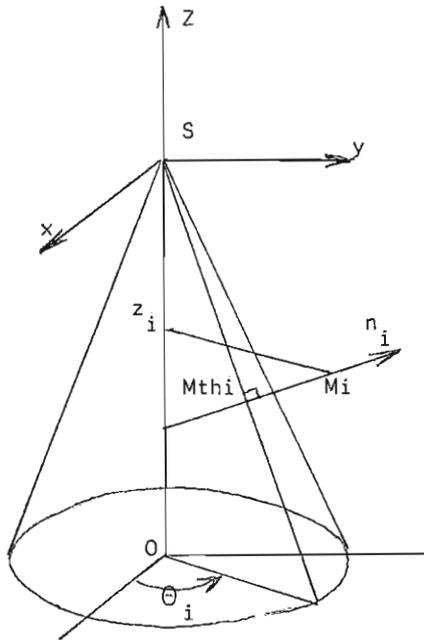


$$\xi_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - R$$

$$\vec{n}_i \begin{cases} \cos \theta_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \\ \sin \theta_i = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \\ 0 \end{cases}$$

$$Mth_i \begin{cases} R \cos \theta_i \\ R \sin \theta_i \\ z_i \end{cases}$$

Cône



$$\xi_i = (\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - |z_i \operatorname{tg} \Delta|) \cos \Delta$$

$$\vec{n}_i \begin{cases} a_i = \cos \Delta \cos \theta_i \\ b_i = \cos \Delta \sin \theta_i \\ c_i = \sin \Delta \end{cases}$$

$$\text{avec } \cos \theta_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$$

$$\sin \theta_i = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$$

$$Mth_i \begin{cases} x_i - \xi_i \cos \Delta \cos \theta_i \\ y_i - \xi_i \cos \Delta \sin \theta_i \\ z_i - \xi_i \sin \Delta \end{cases}$$

4.4 Mise en équation du calcul du torseur de petits déplacements optimisé par la méthode de GAUSS

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées pluckériennes de \vec{n}_i	Torseur d'écart	Mise en équations et résolution par la Méthode de GAUSS
<p>Droite</p> <p>A) Rectitude dans un plan \vec{yz}</p>	$\{P_i\}_0 \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_i \\ -y_i \end{cases}$	$\tau_0 \begin{cases} 0 \\ \beta \\ 0 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{cases}$	$e_{i1} = \xi_{i1} - (z_i \beta + u) - x_i \cdot (z_i \beta + u)$ $w_1 = \sum e_{i1}^2$ $\frac{\partial w_1}{\partial \beta} = 0 \qquad \frac{\partial w_1}{\partial u} = 0$ $\begin{vmatrix} \sum z_i^2 & \sum z_i \\ \sum z_i & n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta \\ u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum z_i x_i \\ \sum x_i \end{vmatrix}$
<p>B) Rectitude dans un parallépipède parallèle aux plans \vec{yz} et \vec{xz}</p>	<p>Plan \vec{yz}</p> $\{P_i\}_0 \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_i \\ -y_i \end{cases}$ <p>Plan \vec{xz}</p> $\{P_i\}_0 \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -z_i \\ x_i \end{cases}$	$\tau_0 \begin{cases} 0 \\ \beta \\ 0 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ $\tau_0 \begin{cases} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \\ 0 \end{cases}$	$e_{i1} = \xi_{i1} - (z_i \beta + u) = x_i - (z_i \beta + u)$ $w_1 = \sum e_{i1}^2$ $e_{i2} = \xi_{i2} - (-z_i \alpha + v) = y_i - (-z_i \alpha + v)$ $w_2 = \sum e_{i2}^2$ $\frac{\partial w_1}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial w_1}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial w_2}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial w_2}{\partial v} = 0$ $\begin{vmatrix} \sum z_i^2 & \sum z_i & 0 & 0 \\ \sum z_i & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum z_i^2 & -\sum z_i \\ 0 & 0 & -\sum z_i & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum z_i x_i \\ \sum x_i \\ -\sum z_i y_i \\ \sum y_i \end{vmatrix}$

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Pluckériennes de \vec{r}	Torseur d'écart	Mise en équations et résolution par la Méthode de GAUSS
C) Rectitude dans un cylindre d'axe \vec{z}	$\left\{ \mathcal{P}_i \right\}_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \\ -z_i \sin \theta_i \\ z_i \cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}$	$\tau_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$	$e_i = \xi_i - [-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i]$ $W = \sum e_i^2$ $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 0$
$A = \begin{vmatrix} \sum z_i^2 \sin^2 \theta_i & -\sum z_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i & -\sum \sin \theta_i \cos \theta_i z_i & -\sum z_i \sin^2 \theta_i & -\sum z_i \sin \theta_i \\ -\sum z_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum z_i^2 \cos^2 \theta_i & \sum z_i \cos^2 \theta_i & \sum z_i \cos \theta_i \sin \theta_i & \sum z_i \cos \theta_i \\ -\sum z_i \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum z_i \cos^2 \theta_i & \sum \cos^2 \theta_i & \sum \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum \cos \theta_i \\ -\sum z_i \sin^2 \theta_i & \sum z_i \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum \sin^2 \theta_i & \sum \sin \theta_i \\ -\sum z_i \sin \theta_i & \sum z_i \cos \theta_i & \sum \cos \theta_i & \sum \sin \theta_i & n \end{vmatrix}$ $A \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ u \\ v \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum \xi_i z_i \sin \theta_i \\ \sum \xi_i \cos \theta_i z_i \\ \sum \xi_i \cos \theta_i \\ \sum \xi_i \sin \theta_i \\ \sum \xi_i \end{pmatrix}$			
Plan planéité	$\left\{ \mathcal{P}_i \right\}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_i \\ -x_i \\ 0 \end{pmatrix}$	$\tau_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$	$e_i = \xi_i - (y_i \alpha - x_i \beta + w)$ $W = \sum e_i^2$ $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial w} = 0$ $\begin{vmatrix} \sum y_i^2 & -\sum x_i y_i & \sum y_i \\ -\sum x_i y_i & \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ \sum y_i & -\sum x_i & n \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \xi_i y_i \\ -\sum \xi_i x_i \\ \sum \xi_i \end{pmatrix}$

Nature de la surface Géométrie idéale	Coordonnées Plückériennes de \vec{n}	Torseur d'écart	Mise en équations et résolution par la Méthode de GAUSS
Cercle circularité	<p>On cherche à la fois : le cercle qui passe au mieux des points en projection dans le plan xy, et le plan qui passe au mieux des points de mesure.</p> <p>A) Cercle qui passe au mieux des points</p> <p>Si r est l'accroissement du rayon porté par \vec{n}_i qui minimise les e_i on a</p> $\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{array} \right\}_0$	$e_{i1} = (\xi_i - r) - (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)$ $e_{i1} = \xi_i - (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i + r)$ $W_1 = \sum e_i^2$ $\frac{\partial W_1}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W_1}{\partial v} = 0 \quad \frac{\partial W_1}{\partial r} = 0$	<p>B) Plan passant au mieux des points :</p> $\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_i \\ -x_i \\ 0 \end{array} \right\}_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{array} \right\}_0$ $e_{i2} = z_i - (y_i \alpha - x_i \beta + w)$ $W_2 = \sum e_i^2$ $\frac{\partial W_2}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W_2}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W_2}{\partial w} = 0$ $\begin{array}{cccccc c} \Sigma \cos^2 \theta_i & \Sigma \cos \theta_i \sin \theta_i & \Sigma \cos \theta_i & 0 & 0 & 0 & u \\ \Sigma \cos \theta_i \sin \theta_i & \Sigma \sin^2 \theta_i & \Sigma \sin \theta_i & 0 & 0 & 0 & v \\ \Sigma \cos \theta_i & \Sigma \sin \theta_i & n & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma y_i^2 & -\Sigma x_i y_i & \Sigma y_i & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\Sigma x_i y_i & \Sigma x_i^2 & -\Sigma x_i & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma y_i & -\Sigma x_i & n & \gamma \end{array} = \begin{array}{l} \Sigma \xi_i \cos \theta_i \\ \Sigma \xi_i \sin \theta_i \\ \Sigma \xi_i \\ \Sigma z_i y_i \\ -\Sigma z_i x_i \\ \Sigma z_i \end{array}$

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Pluckériennes de \vec{n}	Torseur d'écart	Mise en équations et résolution par la Méthode de GAUSS
Sphère	$\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_i \cos \theta_i \\ \cos \beta_i \sin \theta_i \\ \sin \beta_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_0$	$\tau_0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \\ v \\ w \end{array} \right.$	

Si r est l'accroissement du rayon porté par \vec{n}_i qui minimise les écarts e_i on a :

$$e_i = (\xi_i - r) - (u \cos \beta_i \cos \theta_i + v \cos \beta_i \sin \theta_i + w \sin \beta_i)$$

d'où

$$e_i = \xi_i - (u \cos \beta_i \cos \theta_i + v \cos \beta_i \sin \theta_i + w \sin \beta_i + r)$$

$$W = \sum e_i^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial w} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \quad \text{donne}$$

$$A = \begin{vmatrix} \sum \cos^2 \theta_i \cos^2 \theta_i & \sum \cos^2 \beta_i \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum \cos \beta_i \sin \beta_i \cos \theta_i & \sum \cos \beta_i \cos \theta_i \\ \sum \cos^2 \beta_i \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum \cos^2 \beta_i \sin^2 \theta_i & \sum \cos \beta_i \sin \beta_i \sin \theta_i & \sum \cos \beta_i \sin \theta_i \\ \sum \cos \beta_i \sin \beta_i \cos \theta_i & \sum \cos \beta_i \sin \beta_i \sin \theta_i & \sum \sin^2 \beta_i & \sum \sin \beta_i \\ \sum \cos \beta_i \cos \theta_i & \sum \cos \beta_i \sin \theta_i & \sum \sin \beta_i & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum \xi_i \cos \theta_i \cos \theta_i \\ \sum \xi_i \cos \theta_i \sin \theta_i \\ \sum \xi_i \sin \theta_i \\ \sum \xi_i \end{vmatrix}$$

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Pluckériennes de n	Torseur d'écart	Mise en équations et résolution par la Méthode de GAUSS
Cylindre (cylindricité)	$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \\ -z_i \sin \theta_i \\ z_i \cos \theta_i \\ 0 \end{array} \right\}_0$	$\vec{\tau}_0 \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{array} \right.$	<p>Si r est l'accroissement du rayon porté par \vec{n}_i qui minimise les écarts e_i on a :</p> $e_i = (\xi_i - r) - [-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i]$ <p>Soit</p> $e_i = \xi_i - [-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + \cos \theta_i u + \sin \theta_i v + r]$ $W = \sum e_i^2$ $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial r} = 0$
$A = \begin{pmatrix} \sum z_i^2 \sin^2 \theta_i & -\sum z_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i & -\sum \sin \theta_i \cos \theta_i z_i & -\sum z_i \sin^2 \theta_i & -\sum z_i \sin \theta_i \\ \sum z_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum z_i^2 \cos^2 \theta_i & \sum z_i \cos^2 \theta_i & \sum z_i \cos \theta_i \sin \theta_i & \sum z_i \cos \theta_i \\ \sum z_i \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum z_i \cos^2 \theta_i & \sum \cos^2 \theta_i & \sum \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum \cos \theta_i \\ \sum z_i \sin^2 \theta_i & \sum z_i \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum \sin^2 \theta_i & \sum \sin \theta_i \\ \sum z_i \sin \theta_i & \sum z_i \cos \theta_i & \sum \cos \theta_i & \sum \sin \theta_i & n \end{pmatrix}$			
$\begin{vmatrix} A \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ u \\ v \\ r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sum \xi_i z_i \sin \theta_i \\ \sum \xi_i \cos \theta_i z_i \\ \sum \xi_i \cos \theta_i \\ \sum \xi_i \sin \theta_i \\ \sum \xi_i \end{vmatrix}$			

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Plückériennes de \vec{n}	Torseur d'écart	Mise en équations et résolution par la Méthode de GAUSS																																																		
Cône	$\begin{cases} a_i \\ b_i \\ c_i \\ l_i = y_i c_i - z_i b_i \\ m_i = z_i a_i - x_i c_i \\ n_i = x_i b_i - y_i a_i \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ w \end{cases}$																																																			
<p>Si r_i est l'accroissement de la position de la surface réelle portée par \vec{n}_i, due à un accroissement δ de l'angle Δ du cône on a :</p>																																																					
$e_i = (\xi_i - r_i) - (\alpha l_i + \beta m_i + u a_i + v b_i + w c_i)$																																																					
<p>avec $d_i = \frac{ z_i }{\cos \Delta} + \xi_i \operatorname{tg} \Delta \quad \text{et} \quad r_i = d_i \cdot \delta$</p>																																																					
<p>soit $e = \xi_i - (\alpha l_i + \beta m_i + u a_i + v b_i + w c_i + d_i \delta)$</p>																																																					
$W = \sum e_i^2$																																																					
$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial w} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \delta} = 0$																																																					
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Σl_i^2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i m_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i a_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i b_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i c_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i d_i$</td> <td rowspan="6" style="text-align: center; vertical-align: middle; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">α</td> <td rowspan="6" style="text-align: center; vertical-align: middle; padding: 0 10px;">=</td> <td style="padding: 5px;">$\Sigma \xi_i l_i$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i m_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Σm_i^2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma m_i a_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma m_i b_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma m_i c_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma m_i d_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">β</td> <td style="padding: 5px;">$\Sigma \xi_i m_i$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i a_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma m_i a_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Σa_i^2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma a_i b_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma a_i c_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma a_i d_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">u</td> <td style="padding: 5px;">$\Sigma \xi_i a_i$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i b_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma m_i b_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma a_i b_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Σb_i^2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma b_i c_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma b_i d_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">v</td> <td style="padding: 5px;">$\Sigma \xi_i b_i$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i c_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma m_i c_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma a_i c_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma c_i b_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Σc_i^2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma c_i d_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">w</td> <td style="padding: 5px;">$\Sigma \xi_i c_i$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma l_i d_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma m_i d_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma a_i d_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma d_i b_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\Sigma d_i c_i$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Σd_i^2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">δ</td> <td style="padding: 5px;">$\Sigma \xi_i d_i$</td> </tr> </table>				Σl_i^2	$\Sigma l_i m_i$	$\Sigma l_i a_i$	$\Sigma l_i b_i$	$\Sigma l_i c_i$	$\Sigma l_i d_i$	x	α	=	$\Sigma \xi_i l_i$	$\Sigma l_i m_i$	Σm_i^2	$\Sigma m_i a_i$	$\Sigma m_i b_i$	$\Sigma m_i c_i$	$\Sigma m_i d_i$	β	$\Sigma \xi_i m_i$	$\Sigma l_i a_i$	$\Sigma m_i a_i$	Σa_i^2	$\Sigma a_i b_i$	$\Sigma a_i c_i$	$\Sigma a_i d_i$	u	$\Sigma \xi_i a_i$	$\Sigma l_i b_i$	$\Sigma m_i b_i$	$\Sigma a_i b_i$	Σb_i^2	$\Sigma b_i c_i$	$\Sigma b_i d_i$	v	$\Sigma \xi_i b_i$	$\Sigma l_i c_i$	$\Sigma m_i c_i$	$\Sigma a_i c_i$	$\Sigma c_i b_i$	Σc_i^2	$\Sigma c_i d_i$	w	$\Sigma \xi_i c_i$	$\Sigma l_i d_i$	$\Sigma m_i d_i$	$\Sigma a_i d_i$	$\Sigma d_i b_i$	$\Sigma d_i c_i$	Σd_i^2	δ	$\Sigma \xi_i d_i$
Σl_i^2	$\Sigma l_i m_i$	$\Sigma l_i a_i$	$\Sigma l_i b_i$	$\Sigma l_i c_i$	$\Sigma l_i d_i$	x	α	=	$\Sigma \xi_i l_i$																																												
$\Sigma l_i m_i$	Σm_i^2	$\Sigma m_i a_i$	$\Sigma m_i b_i$	$\Sigma m_i c_i$	$\Sigma m_i d_i$		β		$\Sigma \xi_i m_i$																																												
$\Sigma l_i a_i$	$\Sigma m_i a_i$	Σa_i^2	$\Sigma a_i b_i$	$\Sigma a_i c_i$	$\Sigma a_i d_i$		u		$\Sigma \xi_i a_i$																																												
$\Sigma l_i b_i$	$\Sigma m_i b_i$	$\Sigma a_i b_i$	Σb_i^2	$\Sigma b_i c_i$	$\Sigma b_i d_i$		v		$\Sigma \xi_i b_i$																																												
$\Sigma l_i c_i$	$\Sigma m_i c_i$	$\Sigma a_i c_i$	$\Sigma c_i b_i$	Σc_i^2	$\Sigma c_i d_i$		w		$\Sigma \xi_i c_i$																																												
$\Sigma l_i d_i$	$\Sigma m_i d_i$	$\Sigma a_i d_i$	$\Sigma d_i b_i$	$\Sigma d_i c_i$	Σd_i^2		δ		$\Sigma \xi_i d_i$																																												
<p>Si on ne désire pas faire varier l'angle Δ, le système d'équations est obtenu en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice.</p>																																																					

4.5 Mise en équations du calcul du torseur de petits déplacements optimisé par la méthode du simplexe suivant la fonction objectif défaut de forme mini

Nature de la surface Géométrique idéale nominale	Coordonnée Pluckérienne de \vec{n}_i	Torseur d'écart	Mise en équations sous la forme standard du simplexe
<p>Droite (rectitude)</p> <p>A) Rectitude dans un plan x</p>	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_i \\ -y_i \end{array} \right\}_0$	$\tau_0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \beta \\ 0 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$	<p>$e_i = \xi_i - (z_i \beta + u) = x_i - (z_i \beta + u)$</p> <p>Pour tout point de mesure M_i on a :</p> $\Delta S_1 - \Delta S_2 + z_i(\beta_1 - \beta_2) + u_1 - u_2 - K_i = x_i$ $\Delta I_1 - \Delta I_2 + z_i(\beta_1 - \beta_2) + u_1 - u_2 + T_i = x_i$ <p>Fonction objectif :</p> $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2 \text{ minimum}$
<p>B) Rectitude dans un parallélépipède</p>	<p>Plan yz</p> $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_i \\ -y_i \end{array} \right\}_0$	$\tau_0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \beta \\ 0 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$	<p>$e_{i1} = \xi_{i1} - (z_i \beta + u) = x_i - (z_i \beta + u)$</p> <p>$e_{i2} = \xi_{i2} - (-z_i \alpha + v) = y_i - (-z_i \alpha + v)$</p>
	<p>Plan xz</p> $\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -z_i \\ 0 \\ x_i \end{array} \right\}_0$	$\tau_0 \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \\ 0 \end{array} \right.$	<p>Pour tout point de mesure M_i on a :</p> $\Delta S_1 - \Delta S_2 + z_i(\beta_1 - \beta_2) + u_1 - u_2 - K_i = x_i$ $\Delta I_1 - \Delta I_2 + z_i(\beta_1 - \beta_2) + u_1 - u_2 + T_i = x_i$ <p>Avec $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2$ minimum</p> <p>Et $\Delta S'_1 - \Delta S'_2 - z_i(\alpha_1 - \alpha_2) + v_1 - v_2 - K'_i = y_i$</p> $\Delta I'_1 - \Delta I'_2 - z_i(\alpha_1 - \alpha_2) + v_1 - v_2 + T'_i = y_i$ <p>Avec $Z' = \Delta S'_1 - \Delta S'_2 - \Delta I'_1 + \Delta I'_2$ minimum</p>

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Plückériennes de \vec{n}_i	Torseur d'écart	Mise en équations sous la forme standard du simplexe
C) Rectitude dans un cylindre d'axe z	$\left\{ \mathcal{P}_I \right\}_0 \begin{cases} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \\ -z_i \sin \theta_i \\ z_i \cos \theta_i \\ 0 \end{cases}$	$\tau_0 \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{cases}$	$e_i = \xi_i - (-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)$ <p>Pour tout point de mesure M_i on a :</p> $\Delta S_1 - \Delta S_2 - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - K_i = \xi_i$ <p>Fonction objectif (diamètre du cylindre mini)</p> $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 \text{ minimum}$
Plan Défaut de planéité	$\left\{ \mathcal{P}_I \right\}_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_i \\ -x_i \\ 0 \end{cases}$	$\tau_0 \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{cases}$	$e_i = \xi_i - (y_i \alpha - x_i \beta + w)$ <p>Pour tout point de mesure M_i on a :</p> $\Delta S_1 - \Delta S_2 + y_i (\alpha_1 - \alpha_2) - x_i (\beta_1 - \beta_2) + w_1 - w_2 - K_i = \xi_i$ $\Delta I_1 - \Delta I_2 + y_i (\alpha_1 - \alpha_2) - x_i (\beta_1 - \beta_2) + w_1 - w_2 + L_i = \xi_i$ <p>Fonction objectif : défaut de forme mini</p> $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 + \Delta I_2 - \Delta I_1 \text{ minimum}$
Cercle circularité	$\left\{ \mathcal{P}_I \right\}_0 \begin{cases} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$	$\tau_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{cases}$	$e_i = \xi_i - (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i + r)$ <p>Pour tout point de mesure M_i on a :</p> $\Delta S_1 - \Delta S_2 + \cos \theta_i (v_1 - v_2) + \sin \theta_i (u_1 - u_2) - K_i = \xi_i$ $\Delta I_1 - \Delta I_2 + \cos \theta_i (v_1 - v_2) + \sin \theta_i (u_1 - u_2) + T_i = \xi_i$ <p>Fonction objectif : défaut de forme mini</p> $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2 \text{ minimum}$

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Pluckériennes de n_i	Torseur d'écart	Mise en équations sous la forme standard du simplexe
Sphère	$\left\{ \mathcal{P}_i \right\}_0 \begin{cases} \cos \beta_i \cos \theta_i \\ \cos \beta_i \sin \theta_i \\ \sin \beta_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$	$\tau_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \\ v \\ w \end{cases}$	$e_i = \xi_i - (u \cos \beta_i \cos \theta_i + v \cos \theta_i \sin \theta_i + w \sin \theta_i)$ <p>Pour tout point de mesure M_i on a :</p> $\Delta S_1 - \Delta S_2 + \cos \beta_i \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \cos \beta_i \sin \theta_i (v_1 - v_2) + \sin \beta_i (w_1 - w_2) - k_i = \xi_i$ $\Delta I_1 - \Delta I_2 + \cos \beta_i \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \cos \beta_i \sin \theta_i (v_1 - v_2) + \sin \beta_i (w_1 - w_2) + \tau_i = \xi_i$ <p>Fonction objectif : défaut de forme mini</p> $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2 \text{ minimum}$
Cylindre cylindricité	$\left\{ \mathcal{P}_i \right\}_0 \begin{cases} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \\ -z_i \sin \theta_i \\ z_i \cos \theta_i \\ 0 \end{cases}$	$\tau_0 \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{cases}$	$e_i = \xi_i - [-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i]$ <p>Pour tout point de mesure M_i on a :</p> $\Delta S_1 - \Delta S_2 - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - k_i = \xi_i$ $\Delta I_1 - \Delta I_2 - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - \tau_i = \xi_i$ <p>Fonction objectif : défaut de forme mini</p> $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2 \text{ minimum}$

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Plückériennes de n_i	Torseur d'écart	Mise en équations sous la forme standard du simplexe
cône	$\left\{ \begin{array}{l} a_i \\ b_i \\ c_i \\ l_i = y_i c_i - z_i b_i \\ m_i = z_i a_i - x_i c_i \\ n_i = x_i b_i - y_i a_i \end{array} \right.$	$\tau_0 \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ w \end{array} \right.$	$\Delta S_1 - \Delta S_2 + l_i (\alpha_1 - \alpha_2) + m_i (\beta_1 - \beta_2) + d_i (u_1 - u_2) + b_i (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) l_i + d_i (\delta_1 - \delta_2) - k_i = \xi_i$ $\Delta I_1 - \Delta I_2 + l_i (\alpha_1 - \alpha_2) + m_i (\beta_1 - \beta_2) + d_i (u_1 - u_2) + b_i (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) l_i + d_i (\delta_1 - \delta_2) - T_i = \xi_i$ <p>Fonction objectif : défaut de forme mini</p> $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - I_1 + I_2 \text{ minimum.}$
<p>Si on désire optimiser un cône de 1/2 angle au sommet Δ donné, le système d'équations est obtenu en supprimant les termes en $(\delta_1 - \delta_2)$</p>			

4.6 Mise en équations du calcul du torseur de petits déplacements optimisé par la méthode du simplexe suivant la fonction objectif plus grande surface tangente intérieure, ou plus petite surface tangente extérieure

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Pluckériennes de \vec{n}	Torseur d'écart	Mise en équations sous la forme standard du simplexe
Cercle	$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_0$	$\vec{\tau}_0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{array} \right.$	<p>A - <u>Plus grand cercle tangent intérieur.</u></p> <p>Si R mini est le rayon minimum du cercle idéal nominal ($\xi_i \geq 0$)</p> <p>on a : $\xi_i = \rho_i - R \text{ mini}$</p> <p>en prenant ΔR l'accroissement du rayon mini on a : $e_i = (\rho_i - R \text{ mini} - \Delta R)n - (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)$ avec $e_i \geq 0$</p> <p>Pour tout point M_i on a :</p> $\Delta R + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) + T_i = \rho_i - R \text{ mini}$ <p>Fonction objectif $Z = \Delta R \text{ maximum}$</p> <p>B - <u>Plus petit cercle tangent extérieur.</u></p> <p>Si R maxi est le rayon maximum du cercle idéal nominal ($\xi_i \leq 0$)</p> <p>on a : $\xi_i = \rho_i - R \text{ maxi}$</p> <p>en prenant ΔR la variation du rayon maxi on a :</p> <p>avec $\Delta R \geq 0$</p> $e_i = (\rho_i - R \text{ maxi} + \Delta R)n - (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)$ <p>avec $e_i \leq 0$</p> <p>Pour tout point M_i on a :</p> $\Delta R + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - k_i = \rho_i - R \text{ maxi}$ <p>Fonction objectif : $Z = \Delta R \text{ maximum}$</p>

Nature de la surface géométrique idéale nominale	Coordonnées Pluckériennes de n_i	Torseur d'écart	Mise en équations sous la forme standard du simplexe
Cylindre	$\begin{cases} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \\ -z_i \sin \theta_i \\ z_i \cos \theta_i \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ u \\ v \\ 0 \end{cases}$	<p>A - <u>Plus grand cylindre (alésage) tangent int.</u></p> <p>Si R_{mini} est le rayon minimum du cylindre idéal nominal : $\xi_i \geq 0$</p> <p>avec : $\xi_i = \rho_i - R_{\text{mini}}$</p> <p>Si ΔR est l'accroissement du rayon mini on a :</p> $e_i = \xi_i - (-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i + \Delta R) \text{ avec } e_i \geq 0$ <p>Soit sous forme standard du simplexe :</p> $\Delta R - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) + T_i = \rho_i - R_{\text{mini}}$ <p>Fonction objectif : $Z = \Delta R$ maximum</p> <p>B - <u>Plus petit cylindre (arbre) tangent ext.</u></p> <p>Si R_{maxi} est le rayon maxi du cylindre idéal nominal ($\xi_i \leq 0$)</p> <p>avec : $\xi_i = \rho_i - R_{\text{maxi}}$</p> <p>Si ΔR est la diminution du rayon maxi ($\Delta R > 0$) on a :</p> $e_i = \xi_i - (-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i - \Delta R)$ <p>avec $e_i \leq 0$</p> <p>Soit sous forme standard du simplexe :</p> $-\Delta R - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - k_i = \rho_i - R_{\text{maxi}}$ <p>Fonction objectif : $Z = \Delta R$ maximum</p>

4.7 Connaissant le torseur d'écart, détermination des paramètres de la surface géométrique idéale associée à la surface fabriquée

Nature de la surface géométrique idéale nominale	centrée sur oxyz		ramenée à la position réelle	
	la surface géométrique idéale nominale est définie par :	la surface géométrique idéale associée aux centres des sphères de palpage est définie par :	la surface géométrique idéale associée aux centres des sphères de palpage est définie par :	la surface géométrique idéale associée à la surface fabriquée compte tenu du diamètre de la sphère de palpage
Droite	2 points extrêmes $O \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ $M_{th_2} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ z_2 \end{cases}$	2 points extrêmes $O' \begin{cases} u \\ v \\ 0 \end{cases}$ $M'_{th_2} \begin{cases} z_2 + u \\ -z_2 + v \\ z_2 \end{cases}$	R^{-1} P_1 P_2	2 points extrêmes p_1 et p_2 (un troisième point appartenant au plan contenant la droite est palpé) on définit $\vec{n} = \vec{P_1 P_2} \wedge \vec{P_2 P_3}$ $\vec{OP_1} = \vec{OP_1} + \text{signe} \cdot \frac{d}{2} \cdot \vec{n}$ $\vec{OP_2} = \vec{OP_2} + \text{signe} \cdot \frac{d}{2} \cdot \vec{n}$
Plan	3 points $M_{th_0} \begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{cases}$ avec $x_0 = \frac{x_{iM} - x_{imini}}{2}$ $y_0 = \frac{y_{iM} - y_{imini}}{2}$ $O \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ $M_{th_2} \begin{cases} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{cases}$	3 points $M_{th_0'} \begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ y_0 \alpha - x_0 \beta + w \end{cases}$ $O' \begin{cases} 0 \\ 0 \\ w \end{cases}$ $M_{th_2'} \begin{cases} x_2 \\ y_2 \\ y_2 \alpha - x_2 \beta - w \end{cases}$	R^{-1} P_0 O P_2	une normale \vec{n} au plan $\vec{n} = \vec{OP_0} \wedge \vec{OP_2}$ un point P "centre" de la surface $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \text{signe} \cdot \frac{d}{2} \cdot \vec{n}$

Nature de la surface géométrique idéale nominale	centrée sur oxyz		ramenée à la position réelle	
	la surface géométrique idéale nominale est définie par :	la surface géométrique idéale associée aux centres des sphères de palpage est définie par :	la surface géométrique idéale associée aux centres des sphères de palpage est définie par :	la surface géométrique idéale associée à la surface fabriquée compte tenu du diamètre de la sphère de palpage
Cercle	<p>Centre</p> $O \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ <p>Rayon : R</p>	<p>Centre</p> $C' \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$ <p>Rayon R' = R + r 2 points</p> $P'_1 \begin{cases} u+R' \\ v \\ w-R \beta \end{cases}$ $\theta_1 = 0$ $P'_2 \begin{cases} u \\ v+R' \\ w + R \alpha \end{cases}$ $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$	<p>Centre</p> C <p>Rayon R'</p> <p>2 points</p> <p>P₁</p> <p>P₂</p>	<p>une normale \vec{n}</p> $\vec{n} = \vec{CP}_1 \wedge \vec{CP}_2$ <p>un rayon R''</p> $R'' = R' + \text{signe}_2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \vec{n}$ <p>Un centre C''</p> $OC'' = OC + \text{signe}_1 \cdot \frac{d}{2} \cdot \vec{n}$
Sphère	<p>Centre</p> $O \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ <p>Rayon R</p>	<p>Centre</p> $C' \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$ <p>Rayon R'</p> <p>R' = R + r</p>	<p>Centre</p> C <p>Rayon R'</p>	<p>Centre</p> C <p>Rayon R''</p> $R'' = R' + \text{signe}_2 \cdot \frac{d}{2}$
Cylindre	<p>2 points de l'axe</p> $O \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ $M \begin{cases} 0 \\ 0 \\ z_{\text{Maxi}} \end{cases}$ <p>Rayon R</p>	<p>2 points de l'axe</p> $C' \begin{cases} u \\ v \\ 0 \end{cases}$ $P' \begin{cases} u+zM \beta \\ v - \alpha zM \\ z_{\text{Maxi}} \end{cases}$ <p>Rayon R'</p> <p>R' = R + r</p>	<p>2 points extrêmes de l'axe</p> C <p>P</p> <p>Rayon R'</p>	<p>2 points extrêmes de l'axe</p> C <p>P</p> <p>Rayon R''</p> $R'' = R' + \text{signe}_3 \cdot \frac{d}{2}$

Cône	2 points de l'axe Le sommet	2 points de l'axe Le sommet	2 points de l'axe Le sommet	2 points de l'axe Le sommet
	$O \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$	$S' \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$	S^*	$S = S + \text{signe}_3 \cdot \frac{d}{2\sin\Delta'}$
	Le point le plus bas ou celui de plan de jauge	$P' \begin{cases} u+z_b \beta \\ v-z_i \alpha \\ w \end{cases}$	P^*	le point le plus éloigné de S' ou celui du plan de jauge
	$M \begin{cases} 0 \\ 0 \\ z_b \end{cases}$			$P = +\text{signe}_3 \cdot \frac{d}{2\sin\Delta'}$
	Version A :	Version A :	L'angle Δ'	L'angle Δ'
	l'angle Δ provisoire	l'angle Δ' $\Delta' = \Delta + \delta$		
	Version B :	Version B :		
	l'angle imposé Δ	l'angle $\Delta' = \Delta$		

4.8 Etude du sens de la matière :

Le sens de la matière est déterminé en comparant le sens d'accostage du dernier point palpé et la direction de la normale à la surface en ce point.

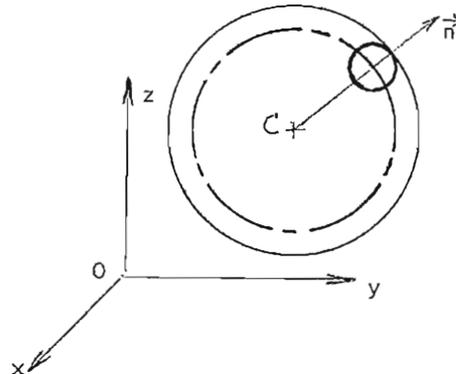
Le sens d'accostage est défini par le sens du déplacement du palpeur sur l'un des trois axes de la machine.

La normale \vec{n} au dernier point palpé M_i est définie de la manière suivante :

a) Cas du plan : \vec{n} est la normale au plan

b) Cas du cercle et de la sphère :

$$\vec{n} = \vec{OJ}_i - \vec{OC}$$

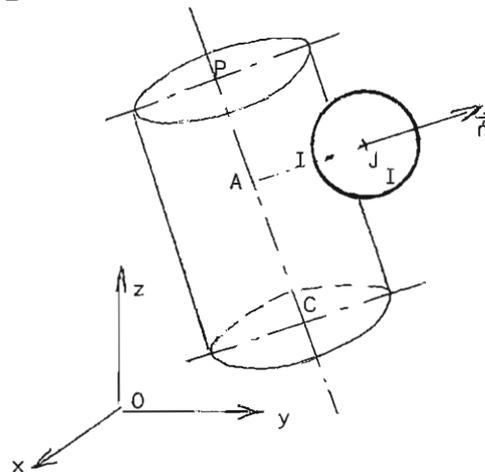


c) Cas du cylindre :

On définit la direction \vec{n}_1
de la droite CP

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{CP}}{|\vec{CP}|}$$

$$\begin{aligned} \vec{CJ}_i \cdot \vec{n}_1 &= \lambda \\ \vec{OA} &= \vec{OC} + \lambda \vec{n}_1 \\ \vec{n} &= \vec{OJ}_i - \vec{OA} \end{aligned}$$

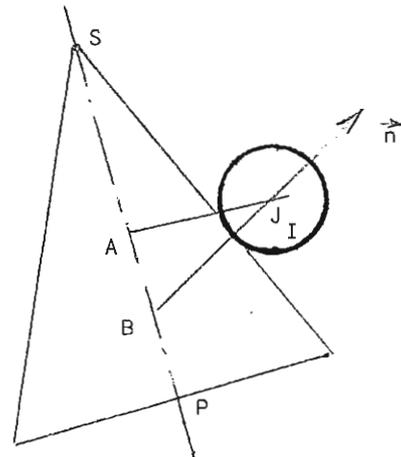


d) Cas du cône :

direction \vec{n}_1 de la droite SP

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{SP}}{|\vec{SP}|}$$

$$\begin{aligned} \vec{SJ}_i \cdot \vec{n}_1 &= \lambda A \\ \vec{OA} &= \vec{OS} + \lambda \vec{A} \cdot \vec{n}_1 \\ \lambda B &= \lambda A + |\vec{j}_i \cdot \vec{A}| \cdot \text{tg} \Delta \\ \vec{OB} &= \vec{OS} + \lambda B \cdot \vec{n}_1 \\ \vec{n} &= \vec{OJ}_i - \vec{OB} \end{aligned}$$



Dans les quatre cas on détermine le signe de la manière suivante :

On compare le signe d'accostage et le signe de la composante de \vec{n} sur le même axe machine

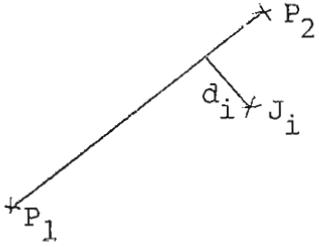
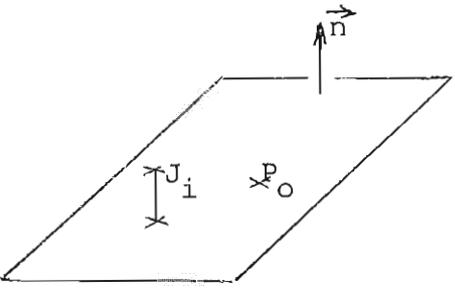
S'ils sont de même signe : signe = 1

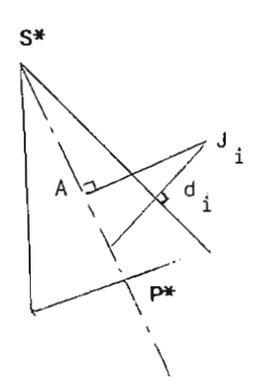
S'ils sont de signe contraire : signe = -1.

4.9 Calcul du critère de petits déplacements C*

Mode de calcul utilisé :

- a) - calcul du nouvel écart e_i par l'équation qui a permis de définir le torseur des petits déplacements lorsque la surface est centrée sur le repère oxyz.
- b) - calcul direct de la distance d_i entre le centre J_i de la sphère de palpation et l'élément géométrique associé aux centres des sphères de palpation de la surface.
- c) - calcul de l'ensemble des $(d_i - e_i)$ et détermination du critère $C^* = \sup \{|\xi_i|\}$

<p>Nature et définition de la surface géométrique idéale optimisée aux centres des sphères de palpé</p>	<p>calcul de e_i $x_i y_i z_i$ étant les coordonnées de la surface idéale nominale le repère machine à mesurer. calcul de d_i distance entre J_i et l'élément géométrique associé aux centres des sphères de palpé.</p>
<p><u>Droite</u></p> <p>2 points extrêmes</p> <p>P_1 et P_2</p>	<p>En tout point I on a : $\epsilon_i = d_i - e_i$ avec</p> $e_{i1} = x_i - (z_i \beta + u)$ $e_{i2} = y_i - (-z_i \alpha + v)$ $e_i = \sqrt{e_{i1}^2 + e_{i2}^2}$ $d_i = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2} \wedge \overrightarrow{P_1 J_i}}{ \overrightarrow{P_1 P_2} }$ <p>et $C^* = \sup \{ d_i - e_i \}$</p> 
<p><u>Plan</u></p> <p>Une normale \vec{n} au plan</p> <p>Un point P_0</p>	<p>En tout point I on a : $\epsilon_i = d_i - e_i$ avec</p> $e_i = \xi_i - (y_i \alpha - x_i \beta + w)$ $d_i = \overrightarrow{P_0 J_i} \cdot \vec{n}$  <p>et $C^* = \sup \{ \epsilon_i \}$</p>

<p>Nature et définition de la surface géométrique idéale optimisée aux centres des sphères de palpé</p>	<p>calcul de e_i $x_i y_i z_i$ étant les coordonnées de la surface idéale nominale le repère machine à mesurer. calcul de d_i distance entre w_i et l'élément géométrique associé aux centres des sphères de palpé.</p>
<p><u>Cercle</u> Une normale \vec{n} Rayon R' Centre C</p>	<p>En tout point I on a : $\epsilon_i = d_i - e_i$ avec : $e_i = \xi_i - (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i + r)$ $d_i = CJ_i - R'$ et $C^* = \sup \{ \epsilon_i \}$</p>
<p><u>Sphère</u> Centre C Rayon R'</p>	<p>En tout point I on a : $\epsilon_i = d_i - e_i$ avec $e_i = \xi_i - (u \cos \beta_i \cos \theta_i + v \cos \beta_i \sin \theta_i + w \sin \beta_i + r)$ avec : $\sin \theta_i = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$ $\sin \beta_i = \frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}$ $\cos \theta_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$ $\cos \beta_i = \frac{x_i^2 + y_i^2}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}$ $d_i = \vec{CJ}_i - R'$ $C^* = \sup \{ \epsilon_i \}$</p>
<p><u>Cylindre</u> 2 points extrêmes de l'axe : C & P Rayon : R'</p>	<p>En tout point I on a : $\epsilon_i = d_i - e_i$ avec $e_i = \xi_i - (-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i + r)$ avec $\cos \theta_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$ $\sin \theta_i = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$ $d_i = \frac{ \vec{CP} \wedge \vec{CJ}_i }{ \vec{CP} } - R'$ $C^* = \sup \{ \epsilon_i \}$</p>
<p><u>Cône</u> 2 points de l'axe : le sommet S^* le point P^* l'angle Δ'</p>	<p>En tout point I on a : $\epsilon_i = d_i - e_i$ avec $e_i = \xi_i - (\alpha l_i + \beta m_i + u a_i + v b_i + w c_i + d_i \delta)$ $\vec{n}_1 = \frac{\vec{S^*P^*}}{ \vec{S^*P^*} }$ $AJ_i = \frac{ \vec{P^*S^*} \wedge \vec{P^*J}_i }{ \vec{P^*S^*} }$ $d_i = [AJ_i - (S^*J_i \cdot \vec{n}_1) \operatorname{tg} \Delta] \cdot \cos \Delta$ $C^* = \sup \{ \epsilon_i \}$</p> 

CHAPITRE V

V - ETUDE COMPARATIVE DES RESULTATS OBTENUS PAR UNE OPTIMALISATION SUIVANT LES CRITERES DE GAUSS, DU DEFAUT DE FORME MINI, DE LA PLUS GRANDE OU DE LA PLUS PETITE SURFACE TANGENTE INTERIEURE OU EXTERIEURE.

Cette étude a été faite sur une machine à mesure tridimensionnelle MMT.13-08-06 de la société SEIV RENAULT ayant une précision absolue dans le volume de 7μ . Cette précision est vérifiée par la mesure d'une cale étalon de 500 mm placée dans l'espace de la machine et principalement suivant des directions à 45° par rapport aux axes de la machine. Celle-ci est dans un local climatisé régulé en température, et en hygrométrie. Le palpeur de mesure est un palpeur RENISHAW type P_2 mesure à la volée, réglé à 25 grammes d'effort de contact entre le palpeur et la pièce. Le système de traitement des coordonnées des points de mesures est fait sur un calculateur HEWLETT-PACKARD 9826 de langage HPL sur ROM. Le logiciel PROMESUR n'a pas été utilisé. Un logiciel spécifique [MIR.86] d'acquisition des points en mode apprentissage et en mode automatique a été écrit (voir organigramme en annexe C), celui-ci permet :

- d'écrire une gamme de palpation par apprentissage manuel.
- de stocker cette gamme sur un fichier disquette.
- d'exécuter cette gamme en commande numérique tout en enregistrant les points de mesure sur fichier disquette.

Ce programme permet donc de créer des fichiers de points mesurés sur des surfaces géométriques réelles et d'établir ainsi une base de données de mesures exploitable par différents algorithmes d'optimisation.

Une étude comparative des différents algorithmes d'optimisations utilisés sur les machines à mesures [SCH.84] a été menée par le Laboratoire National d'Essais.

Cette étude a eu pour objectif de comparer les résultats obtenus par différents logiciels, lorsque ceux-ci traitent un même ensemble de points de mesure. La difficulté d'interprétation des résultats obtenus tient au fait que les algorithmes utilisés sont inconnus et que le choix arbitraire des points de mesures peut favoriser une méthode plutôt qu'une autre en annulant le manque de performance de certaines méthodes. On remarque d'autre part que les écarts de forme optimisés varient d'une méthode à l'autre même si plusieurs algorithmes annoncent une optimisation des moindres carrés.

Ainsi notre étude porte sur une comparaison de la méthode générale du torseur de petits déplacement optimisés soit par une répartition Gaussienne des écarts de forme, soit par un critère de défaut de forme mini, soit par un critère de plus grande surface tangente intérieure, soit par le critère plus petite surface tangente extérieure.

Cette étude a été menée au Laboratoire [MIR.86], pour le cercle, le plan et le cylindre. Les conclusions ont été suffisamment significatives pour les extrapoler à d'autres surfaces.

Les algorithmes utilisés sont ceux définis au chapitre précédent.

Pour chaque ensemble de points nous avons fait varier le nombre de points de mesure, leur répartition sur la surface, les dimensions de la surface et fait apparaître leur influence sur :

- le défaut de forme obtenu,
- la position géométrique de la surface idéale optimisée et ses paramètres géométriques,
- le temps de calcul correspondant à l'optimisation.

5.1 Cas du cercle :

Les mesures ont été effectuées dans un plan parallèle au marbre.

En annexe D nous donnons les tableaux des coordonnées des points palpés ainsi que les écarts optimisés.

Les résultats obtenus sont :

- les coordonnées du centre du cercle optimisé exprimées dans le repère machine à mesurer,
- le défaut de forme correspondant au supérieur moins l'inférieur des écarts optimisés,
- les diamètres tangents extérieurs, intérieurs et diamètre moyen.

5.1.1 On obtient les résultats suivants :

Première série de cas : Les points sont également répartis sur la circonférence.

Cas_1 : Cercle de \varnothing 122 mesuré en 8 points également répartis sur la circonférence

Type de Résolution	Centre		Défaut de forme	Diamètres associés		
	Xop	Yop		moyen	extérieur	intérieur
GAUSS	274.751	124.098	0.012	122.344	122.357	122.332
Maxi intér.	274.750	124.096	0.011	-	-	122.336
Mini extér.	274.749	124.099	0.011	-	122.353	-
Défaut mini.	274.749	124.097	0.010	122.345	122.356	122.334
Ecart maxi.	En projection /ox 2 μ /oy 2 μ En vraie grandeur : 3 μ		1,8 μ 16 %	1 μ	4 μ	4 μ
Ecart maxi entre GAUSS et défaut mini	En projection /ox 2 μ /oy 1 μ En vraie grandeur : 2,2 μ		1,8 μ 16 %	1 μ	1 μ	2 μ
Ecart entre les diamètres optimisés aux extrêmes et ceux obtenus par : GAUSS Défaut mini.				-	4 μ 3 μ	-4 μ -2 μ

Cas_2 : Cercle de \emptyset 32 mesuré en 27 points également répartis sur la circonférence.

Type de Résolution	Centre		Défaut de forme	Diamètres associés		
	Xop	Yop		moyen	extérieur	intérieur
GAUSS	160.230	142.805	0.016	32.126	32.143	32.109
Maxi intér.	160.228	142.803	0.017	-	-	32.113
Mini extér.	160.230	142.809	0.019	-	32.140	-
Défaut mini	160.232	142.804	0.014	32.126	32.140	32.112
Ecart maxi.	En projection /ox 4 μ /oy 6 μ En vraie grandeur : 7 μ		5,7 μ 40 %		3 μ	4 μ
Ecart maxi Entre GAUSS et défaut mini	En projection /ox 2 μ /oy 1 μ En vraie grandeur : 2,2		2,7 19 %	0 μ	3 μ	3 μ
Ecart entre les diamètres optimisés aux extrêmes et ceux obtenus par : GAUSS					3 μ	- 4 μ
Défaut mini					0 μ	- 1 μ

Cas 3 : Cercle de \emptyset 186 mesuré en 13 points également répartis sur la circonférence.

Type de Résolution	Centre		Défaut de forme	Diamètres associés		
	Xop	Yop		moyen	extérieur	intérieur
Gauss	744.667	149.350	0.536	186.396	186.932	185.860
Maxi intér.	744.626	149.445	0.591	-	-	185.955
Mini extér.	744.957	149.472	0.777	-	186.852	-
Défaut mini	744.618	149.296	0.468	186.419	186.888	185.951
Ecart maxi	En projection		123 μ	23 μ	80 μ	95 μ
	/ox 339 μ /oy 180 μ					
	En vraie grandeur : 383 μ		26 %			
Ecart maxi entre GAUSS et défaut mini	En projection		67 μ	23 μ	44 μ	91 μ
	/ox 49 μ /oy 54 μ					
	En vraie grandeur : 72 μ		14 %			
Ecart entre les diamètres optimisés extrêmes et ceux obtenus par						
GAUSS					80 μ	- 95 μ
Défaut mini					36 μ	- 94 μ

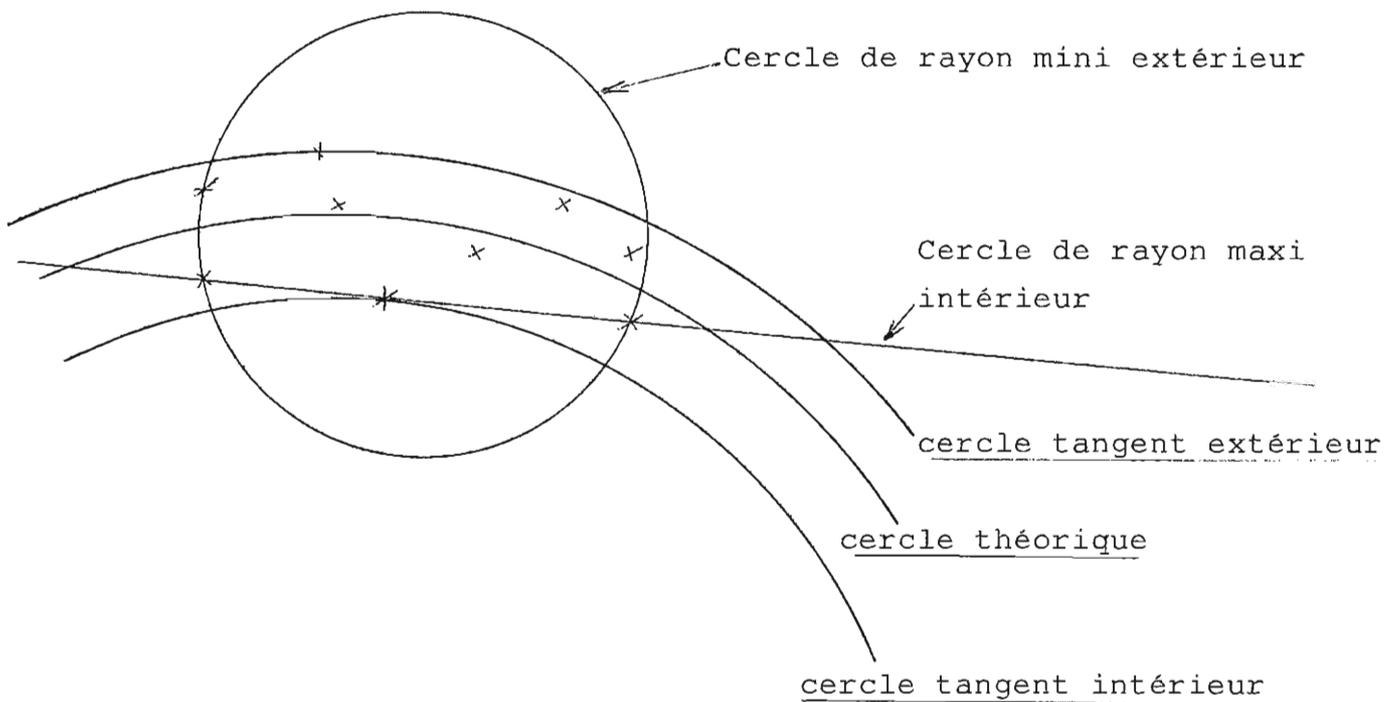
Cas 4 : Cercle de \emptyset 203 mesuré en 53 points également répartis sur la circonférence.

Type de Résolution	Centre		Défaut de forme	Diamètres associés		
	Xop	Yop		moyen	extérieur	intérieur
GAUSS	298,232	154,915	0,0284	203,462	203,490	203,434
Maxi intér.	298,234	154,914	0,0291	-	-	203,435
Mini extér.	298,222	154,905	0,0393	-	203,485	-
Défaut mini	298,233	154,915	0,0279	203,462	203,490	203,434
Ecart maxi	En projection		11 μ 4 %	0 μ	5 μ	1 μ
	/ox 12 μ /oy 10 μ En vraie grandeur : 16 μ					
Ecart maxi entre GAUSS et défaut mini	En projection		0,5 μ 1,8 %	0 μ	0 μ	0 μ
	/ox 1 μ /oy 0 μ En vraie grandeur : 1					
Ecart entre les diamètres optimisés aux extrêmes et ceux obtenus par						
GAUSS					5 μ	-1 μ
Défaut mini					5 μ	-1 μ

Remarque : On peut déjà observer que la méthode de GAUSS donne un défaut de forme supérieur de 14 à 20 % au défaut de forme obtenu par le critère défaut de forme mini.

Deuxième série de cas : Les points ne sont répartis que sur une portion de la circonférence.

Si la répartition des points de mesure se fait sur une portion de cercle inférieure à la moitié de la circonférence, l'optimisation suivant les critères rayon maxi intérieur ou rayon mini extérieur donne des solutions aberrantes, en effet les solutions obtenues sont alors un cercle de rayon infini dans le premier cas et un cercle de centre et de défaut de forme aberrants dans le deuxième cas. La figure ci-dessous illustre ces résultats.

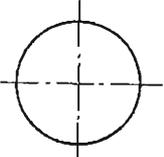
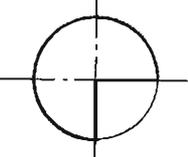
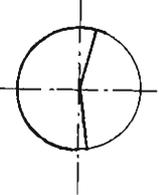


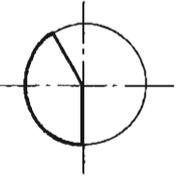
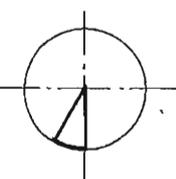
On se limitera dans les cas suivants à une résolution par GAUSS et par le critère défaut de forme mini.

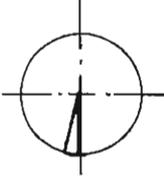
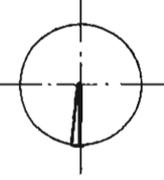
Cas_5 : Cercle de diamètre 57 mesuré en 16 points sur un arc de cercle inférieur à la moitié du pourtour.

Type de Résolution	Centre		Défaut de forme	Diamètres associés		
	Xop	Yop		moyen	extérieur	intérieur
GAUSS	107.921	398.778	0.038	57.312	57.350	52.274
Maxi intér.	Solution aberrante au problème (Défaut de 346.159 mm) .					
Mini extér.	Ce problème n'a pas du tout de solution d'après le Simplexe .					
Défaut mini	107.926	398.792	0.032	57.288	57.321	57.256
Ecart maxi	En projection /ox 5 μ /oy 14 μ		5,5 μ	24 μ	29 μ	18 μ
	En vraie grandeur : 15 μ		16 %			

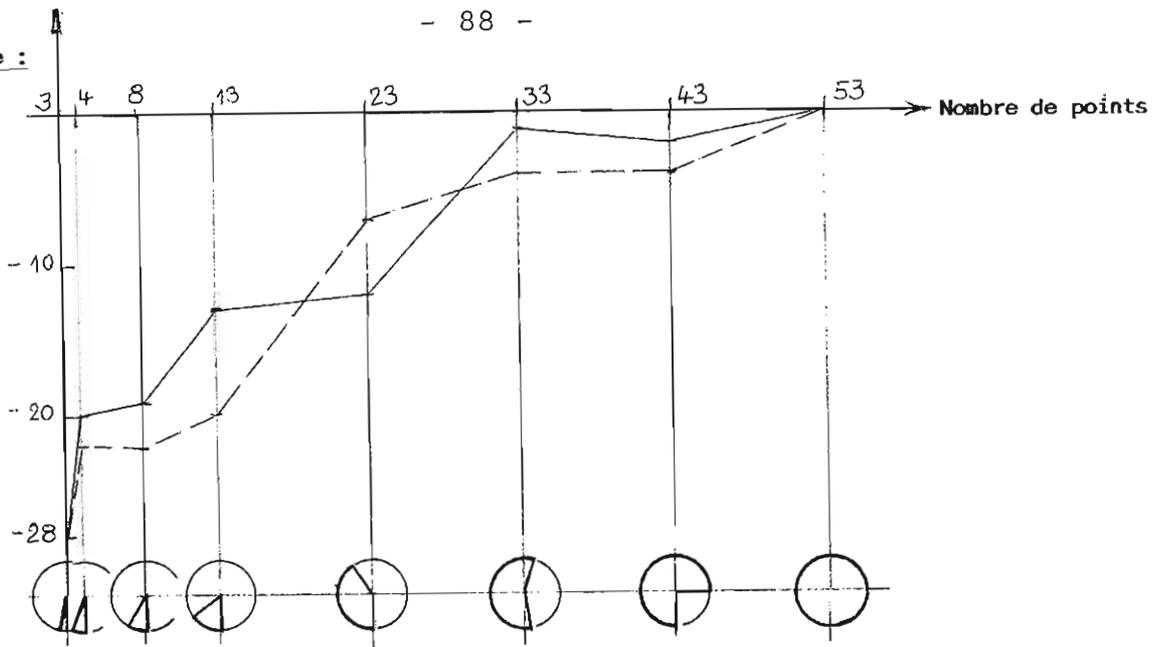
Cas 6 : Sur un cercle de diamètre de 203,5 mm on a 53 mesures avec une densité moyenne de 1 point par 12 mm. On optimise toujours le même cercle, suivant les différents critères mais en réduisant de manière régulière la longueur de la circonférence mesurée.

Nombre de points et répartition		Critère de GAUSS	Critère Défaut mini	Ecart $100(\text{GAUSS}-\text{Déf. mini})$ Déf. mini
Cas 6-1 53 points	Défaut de forme	0,0284	0,0279	0,5 μ 18 %
	\emptyset du cercle ext.	203,462	203,462	0 μ 0 %
	Coordonnées du centre	298,232	298,233	1 μ 0 %
		154,915	154,915	0 μ 0 %
Cas 6-2 43 points	Défaut de forme et écart/cas 1	0,0260 -2 μ	0,0240 -4 μ	2 μ 8 %
	\emptyset du cercle	203,455	203,454	1 μ 0 %
	Ecart/cas 1	- 7 μ	- 8 μ	
	Coordonnées du centre et écart/cas 1	298,229 -3 μ	298,227 -6 μ	2 μ 0 %
		154,917 2 μ	154,917 2 μ	0 μ 0 %
	Ecart absolu	3,6 μ	6,32 μ	
Cas 6-3 33 points	Défaut de forme et écart/cas 1	0,0271 -1 μ	0,0240 -4 μ	3 μ 13 %
	\emptyset du cercle et écart/cas 1	203,452 -10 μ	203,454 -8 μ	2 μ 0 %
	Coordonnées du centre et écart/cas 1	298,224 -8 μ	298,227 -6 μ	3 μ 0 %
		154,918 3 μ	154,917 2 μ	1 μ 0 %
	écart absolu	8,54 μ	6,32 μ	

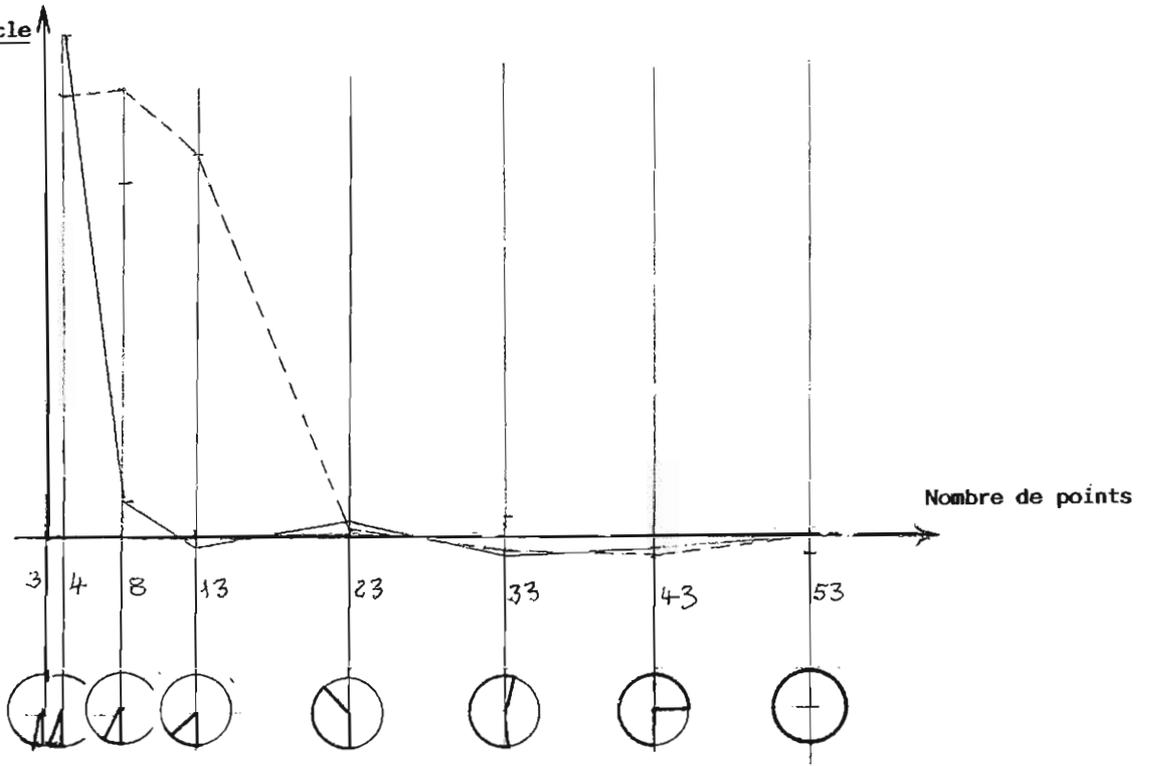
Nombre de points et répartition		Critère de GAUSS	Critère défaut mini	Ecart 100(GAUSS-Déf.mini)	
				Déf. mini	
Cas 6-4 23 points 	Défaut de forme et écart /cas 1	0,022 - 12 μ	0,0205 -7,4 μ	2 μ	7 %
	∅ du cercle et écart /cas 1	203,471 9 μ	203,470 8 μ	1 μ	
	Coordonnées du centre et écart/cas 1	298,238 6 μ 154,926 11 μ	298,237 4 μ 154,921 6 μ	1 μ 5 μ	
	écart absolu	12,52 μ	7,21 μ		
Cas 6-5 13 points 	Défaut de forme écart /cas 1	0,0145 -13 μ	0,0073 -20 μ	7,2 μ	98 %
	∅ du cercle et écart /cas 1	203,458 -4 μ	203,576 +114 μ	118 μ	0,05 %
	Coordonnées du centre et écart/cas 1	298,240 8 μ 154,016 -1 μ	298,269 36 μ 154,977 62 μ	29 μ 61 μ	
	écart absolu	8,12 μ	71 μ		
Cas 6-6 8 points 	Défaut de forme écart /cas 1	0,0089 -19 μ	0,0056 -22 μ	3,3 μ	58 %
	∅ du cercle écart / cas 1	203,538 +76 μ	203,692 230 μ	154 μ	0,07 %
	Coordonnées du centre et écart/cas 1	298,262 30 μ 154,957 42 μ	298,274 41 μ 155,035 120 μ	12 μ 95 μ	
	écart absolu	51 μ	126 μ		

Nombre de points et répartition		Critère de GAUSS	Critère défaut mini	Ecart 100(GAUSS-Déf.mini)	
				Déf. mini	
Cas 6-7					
4 points	Défaut de forme et Ecart/cas 1	0,0079 -20 μ	0,0056 -22 μ	2,3 μ	41 %
	\varnothing du cercle et écart /cas 1	204,934 +472 μ	203,784 +222 μ	1250 μ	
	Coordonnées du centre et écart/cas 1	298,270 38 μ	298,031 41 μ	4 μ	
	et écart/cas 1	155,657 742 μ	155,031 116 μ	626 μ	
	écart absolu	742 μ	123 μ		
Cas 6-8					
3 points	Défaut de forme et Ecart/cas 1	0 -28 μ	0 -27 μ	0	
	\varnothing du cercle et écart/cas 1	207,439 3987 μ	207,449 3987 μ	0	
	Coordonnées du centre et écart/cas 1	298,153 79 μ	298,153 79 μ	0	
	et écart/cas 1	156,913 1998 μ	156,913 1998 μ	0	
	écart absolu	1999 μ	1999 μ		

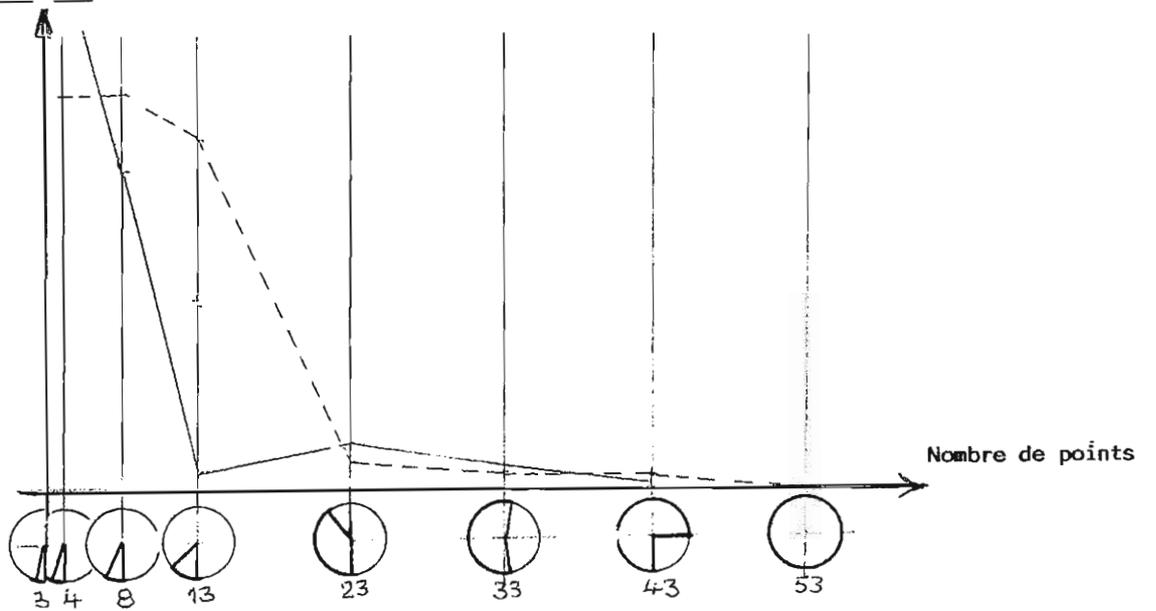
Défaut de forme :
en micron



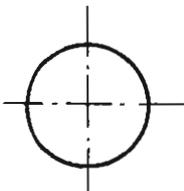
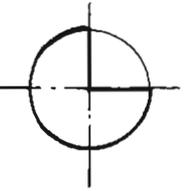
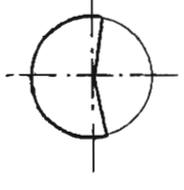
Diamètre du cercle

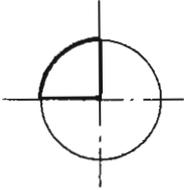
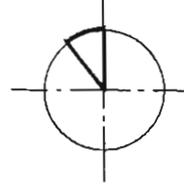


Coordonnées du centre :



Cas 7 : Même étude que le cas N°6 avec un cercle de diamètre
186,5 mesuré en 13 points
densité : 1/45 mm.

Nombre de points et répartition		Critère de GAUSS	Critère défaut mini	Ecart 100(GAUSS-Déf.mini) Déf. mini	
Cas 7-1 13 points 	Défaut de forme	0,536	0,468	67 μ	14 %
	∅ du cercle	186,396	186,419	23 μ	
	Centre du cercle	744,667	744,618	49 μ	
		149,350	149,296	54 μ	
Cas 7-2 10 points 	Défaut de forme et Ecart/cas 1	0,551 +15 μ	0,468 0 μ	83 μ	17 %
	∅ du cercle et Ecart/cas 1	186,384 12 μ	186,419 0 μ	35 μ	
	Centre du cercle et Ecart/cas 1	744,681 14 μ 149,360 10 μ	744,618 0 μ 149,296 0 μ	63 μ	
	Ecart absolu	17 μ	0 μ	64 μ	
Cas 7-3 7 points 	Défaut de forme et Ecart:cas 1	0,360 176 μ	0,234 234 μ	126 μ	53 %
	∅ du cercle et Ecart/cas 1	186,587 191 μ	186,439 20 μ	148 μ	
	Centre du cercle et Ecart/cas 1	745,007 340 μ 149,453 103 μ	744,751 133 μ 149,475 179 μ	744 μ 22 μ	
	Ecart absolu	355 μ	223 μ		

Nombre de points et répartition		Critère de GAUSS	Critère défaut mini	Ecart 100(GAUSS-Déf.mini) Déf. mini
Cas 7-4 4 points 	Défaut de forme et Ecart/cas 1 Ø du cercle et Ecart/cas 1 Centre du cercle et Ecart/cas 1 Ecart absolu	0,0904 446µ 184,862 -1534µ 744,142 - 525µ 150,142 792µ 950 µ	0,0704 398 µ 185,172 -1247 µ 744,286 - 332 µ 150,049 753 µ 822 µ	28 % 690 µ 144 µ 93 µ
Cas 7-5 3 points 	Défaut de forme et Ecart/cas 1 Ø du cercle et Ecart/cas 1 Centre du cercle et Ecart/cas 1 Ecart absolu	0 - 536µ 183,203 -3193µ 743,950 - 717µ 151,016 1666µ 1813 µ	0 - 468 µ 183,203 -3216 µ 743,950 - 668 µ 151,016 1720 µ 1845 µ	

Conclusion :

On observe dans tous les cas étudiés un gain significatif du défaut de forme entre le critère défaut mini et le critère des moindres carrés, pouvant aller dans les cas de longueur de circonférence palpée inférieure à $D/4$ jusqu'à 98 %.

On remarque également que les diamètres des cercles tangents extérieurs ou intérieurs obtenus par le critère défaut de forme mini sont toujours plus près des diamètres optimisés mini ou maxi tangents extérieurs ou intérieurs que ceux obtenus par GAUSS.

On constate également que si la longueur de la zone palpée est supérieure au quart de la longueur de la circonférence, les deux méthodes GAUSS et Défaut mini donneront si la densité de points mesurés est importante des variations de diamètre et de position du centre du cercle optimisé semblables. Dans le cas d'un nombre de points faibles on observe une plus faible dispersion des résultats obtenus par le critère défaut de forme mini.

Si la zone de mesure est inférieure au quart de la circonférence les résultats divergent dans les deux méthodes.

5.1.2 Cas particulier d'un cercle palpé en 4 points [NAW.81] répartis sur la surface suivant deux directions perpendiculaires.

Ce cas particulier correspond au cas le plus couramment utilisé en métrologie classique. L'essai a été fait sur un diamètre de 183 mm.

Les résultats sont les suivants :

Type de Résolution	Centre		Défaut de forme	Diamètres associés		
	Xop	Yop		Moyen	Extérieur	Intérieur
Gauss	744.721	149.358	0.345	183.604	183.450	182.759
Maxi Intérieur	744.729	149.685	0.655	-	-	182.794
Mini Extérieur	745.037	149.353	0.650	-	183.429	-
Défaut mini	744.711	149.358	0.335	183.614	183.449	182.779
Ecart maxi	En projection /ox 692 μ /oy 332 μ En vraie grandeur : 767		315 μ	10 μ	21 μ	35 μ
Ecart maxi entre GAUSS et Défaut mini	En projection /ox 10 μ /oy 0 μ En vraie grandeur : 10 μ		10 μ 3 %	10 μ	1 μ	20 μ
Ecart entre les diamètres optimisés aux extrémums et ceux obtenus par : GAUSS					21 μ	-35 μ
Défaut mini					20 μ	-15 μ

On remarque :

que si l'on fait passer une ellipse par les 4 points mesurés on obtient comme centre celui obtenu par le critère défaut mini (744.711 ; 149.358),

que le centre obtenu par GAUSS est le même que celui obtenu par l'intersection des médiatrices des deux cordes de direction perpendiculaires (744.721 ; 149.358).

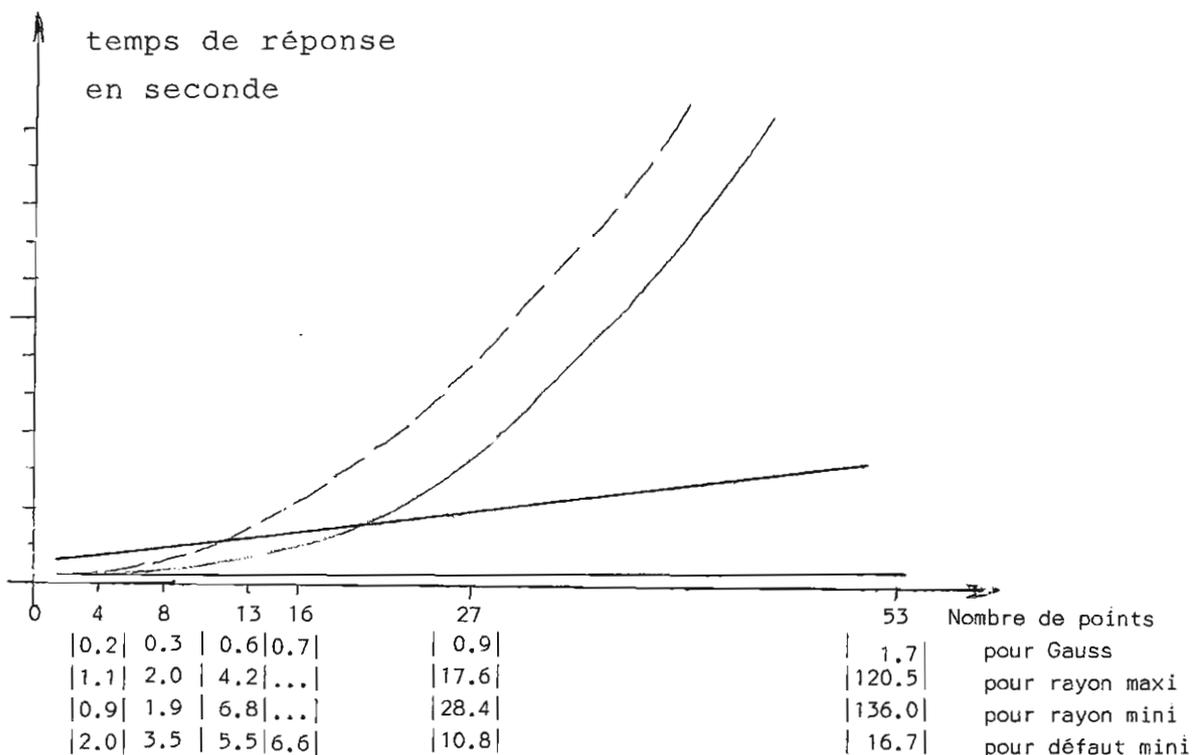
Que les cercles obtenus par les critères rayon maxi et rayon mini passent par trois des quatres points et que leurs centres sont très éloignés des solutions de GAUSS et de Défaut mini.

5.1.3 Influence du nombre de points sur le temps de calcul

Le temps de calcul a été mesuré sur un HP 9826 possédant une ROM spécialisée en calcul matriciel.

Contrairement à la méthode du simplexe optimisé suivant le critère défaut mini, il est nécessaire dans les trois autres méthodes de calculer tous les écarts e_i pour connaître ensuite le défaut de circularité.

On peut représenter graphiquement les résultats :



On remarque :

- que le temps croît d'une façon exponentielle pour les deux critères rayon maxi, rayon mini.

- que les temps de calcul sont dans un rapport de 10 entre le critère de GAUSS et celui du défaut mini.

- que pour un nombre de points de mesure inférieur à 12 points (dans la pratique des machines à mesurer on utilise 4.6.8 points) le temps de calcul reste raisonnable.

5.1.4 Accroissement du défaut de forme obtenu par GAUSS par rapport au critère défaut de forme mini :

On a :

$$\text{gain en \%} = \frac{\text{Défaut par GAUSS} - \text{Défaut mini}}{\text{Défaut mini}} * 100$$

En regroupant les résultats on obtient :

Nbr de pts	Nom du fichier	Défaut GAUSS	Défaut mini	Gain	Gain en %
4	Cer 4 pf	0.3457	0.3354	0.0103	3 %
16	ArCERf	0.0380	0.0325	0.0055	16 %
8	Cerclf	0.0126	0.0108	0.0118	16 %
27	Cerclf	0.0167	0.0140	0.0027	19 %
13	MaCerf	0.5360	0.4687	0.0673	14 %
53	Mandrf	0.0284	0.0279	0.0005	1,8 %

Le gain moyen est de 11 %, si on élimine les deux valeurs extrêmes : correspondant à 4 points palpés et à 53 points palpés, le gain est alors de 16 %.

En conclusion la méthode du défaut mini améliore de manière significative le défaut de forme par rapport à la méthode de GAUSS

5.1.5 Conclusion

Le temps de calcul le plus court est obtenu par la méthode de Gauss, ceci est d'autant plus vrai que le nombre de points est important, en effet le temps de calcul obtenu par la méthode du simplexe est multiplié par 10 dans le cas du critère défaut de forme mini, et croît exponentiellement avec le nombre de points dans les cas des deux autres critères cercle maxi et cercle mini tangents.

Pour obtenir un défaut de forme plus faible, il est nécessaire de faire un compromis entre gain du défaut de forme et temps de calcul. Pour cela un cercle défini par un nombre de points inférieur à 12 permet un gain du défaut de forme de l'ordre de 15 % avec un temps de calcul raisonnable inférieur à 4 secondes et ceci sans aucune restriction sur la répartition des points sur le cercle.

Si l'on désire obtenir le rayon maxi intérieur ou le rayon mini extérieur, il est impératif de mesurer les points sur un arc de cercle supérieur à la moitié de la circonférence du cercle. Le nombre de points doit être limité à 8 ou 12 pour éviter un temps de réponse trop important.

Les diamètres des cercles tangents extérieurs ou intérieurs obtenus par le critère de défaut de forme mini sont toujours plus près des diamètres optimaux mini ou maxi tangents extérieurs ou intérieurs que ceux obtenus par Gauss.

5.2 Cas du cylindre

Les mesures ont été effectuées sur des cylindres d'axes sensiblement parallèles à l'axe z. En annexe E nous donnons les tableaux de coordonnées des points palpés ainsi que les écarts optimisés par les algorithmes définis précédemment.

Les résultats obtenus sont :

- les coordonnées du point de l'axe optimisé appartenant au point de mesure de cote maxi.
- le diamètre moyen correspondant à la demi-somme des diamètres maxi et mini.
- le défaut de forme.
- les angles de rotation en radian autour des axes x et y.

Nous avons fait varier : le nombre de points de mesure, leur répartition sur le cylindre, le rapport (h/d) c'est-à-dire la hauteur de mesure sur le diamètre du cylindre.

Première série de mesure ; les points sont uniformément répartis sur des cercles.

1er Cas : Cylindre de ϕ 199.5 mesuré en 12 points répartis sur 3 cercles de rapport h/d = 0,15.

Type de Résolution	GAUSS	Maxi Intérieur	Mini Extérieur	Défaut mini
Point de l'axe,	X =	190.798	190.683	190.740
	Y =	216.817	216.890	216.839
	Z =	-411.482	-411.482	-411.482
Diamètres	Moyen=	199.462	-	199.474
	Ext. =	199.720	-	199.697
	Int. =	199.205	199.260	199.254
Défaut de forme	=	0.2574	0.3253	0.2686
Rotation autour de x		0.002062	0.004084	-0.002918
Rotation autour de y		0.005021	0.006094	0.012889

Comparaison des résultats obtenus :

A - Ecart maxi entre les positions du point de l'axe obtenu par :

- a) les 4 types d'optimisation
 - en proj. sur ox : 117 μ
 - en proj. sur oy : 166 μ
 - en vraie grandeur : 203 μ
- b) les critères de GAUSS et du défaut mini :
 - en proj. sur ox : 58 μ
 - en proj. sur oy : 22 μ
 - en vraie grandeur : 62 μ

B - Ecart maxi en μ/100 mm dû aux différentes orientations des axes obtenu par:

- les 4 types d'optimisation, 498 μ
 - la méthode de GAUSS et du défaut mini : 157 μ
- $$100 \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}$$

C - Ecart maxi du défaut de forme entre :

- les 4 types d'optimisation : 107 μ soit 50 %,
- la méthode de GAUSS et du défaut mini : 39 μ soit 18 %.

D - Ecart, entre le diamètre mini extérieur et les diamètres tangents extérieurs, obtenu par:

GAUSS : 34 μ
 défaut mini : 11 μ

Ecart, entre le diamètre maxi intérieur et les diamètres tangents intérieurs, obtenu par

GAUSS : 55 μ
 défaut mini : 6 μ

2ème Cas : Cylindre de Ø 118 mesuré en 32 points répartis sur 4 cercles de rapport h/d = 0,5

Type de Résolution	GAUSS	Maxi Intérieur	Mini Extérieur	Défaut mini	
Point de l'axe	X =	274.739	274.783	274.719	274.634
	Y =	124.089	124.265	123.947	123.924
	Z =	-421.813	-421.813	-421.813	-421.813
Diamètres,	Moyen =	118.463	-	-	118.330
	Extér. =	117.017	-	118.710	118.868
	Intér. =	117.910	118.001	-	117.980
Défaut de forme	=	0.5537	0.6291	0.5305	0.4437
Rotation autour de x		0.001120	0.003913	0.001696	-0.001127
autour de y		-0.002803	-0.000704	-0.003183	-0.002473

Comparaison des résultats obtenus :

A - Ecart maxi entre les positions du point de l'axe obtenu par :

- a) les 4 types d'optimisation
 - en proj. sur ox : 149 μ
 - en proj. sur oy : 341 μ
 - en vraie grandeur : 372 μ
- b) les critères de Gauss et du défaut mini :
 - en proj. sur ox : 105 μ
 - en proj. sur oy : 165 μ
 - en vraie grandeur : 195 μ

B - Ecart maxi en μ /100 mm, dû aux différentes orientations des axes, obtenu par :

- les 4 types d'optimisation
- la méthode de Gauss et du défaut mini : 227

$$100 \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}$$

C - Ecart maxi du défaut de forme entre :

- les 4 types d'optimisation : 185μ soit 41 %
- la méthode de Gauss et du défaut mini : 110μ soit 24 %

D - Ecart, entre le Ø mini extérieur et les Ø tangents extérieurs, obtenu par :

- Gauss : 307 μ
- Défaut mini : 158 μ

Ecart, entre le diamètre maxi intérieur et les diamètres tangents intérieurs, obtenu par :

- Gauss : 91 μ
- Défaut mini : 21 μ

Deuxième série de mesure: les points sont répartis sur une portion de cylindre légèrement supérieure à la moitié de la circonférence; cas d'un cylindre de diamètre 94 mesuré en 31 points sur une hauteur de 55 mm.

Type de résolution	GAUSS	Maxi Intérieur	Mini Extérieur	Défaut mini	
Point de l'axe	X =	85.424	85.368	85.436	85.430
	Y =	41.464	41.478	41.468	41.438
	Z =	-327.456	-327.456	-327.456	-327.456
Diamètres	Moyen =	93.905	93.944
	Extér.=	93.952	...	93.932	93.952
	Intér.=	93.858	93.887	...	93.856
Défaut de forme	=	0.0471	0.0873	0.0463	0.0431
Rotation autour de	x	0.000154	-0.000096	-0.000272	0.000341
	Y	0.000418	-0.000926	0.000337	0.000869

Comparaison des résultats obtenus :

A - Ecart maxi entre les positions du point de l'axe obtenu par :

a) les 4 types d'optimisation
en proj. sur ox : 68 μ
en proj. sur oy : 40 μ
en vraie grandeur : 79 μ

b) les critères de GAUSS et du défaut mini :
en proj. sur ox : 6 μ
en proj. sur oy : 26 μ
en vraie grandeur : 26 μ

B - Ecart maxi en $\mu/100$ mm dû aux différentes orientations des axes obtenu par:

- les 4 types d'optimisation, 81 μ
- la méthode de GAUSS et du défaut mini : 48 μ
 $100 \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}$

C - Ecart maxi du défaut de forme entre :

- les 4 types d'optimisation : 44 μ soit 100 %
- la méthode de GAUSS et du défaut mini : 4 μ soit 10 %

D - Ecart entre le diamètre mini extérieur et les diamètres tangents extérieurs obtenu par:

GAUSS : 20 μ
défaut mini : 20 μ

Ecart entre le diamètre maxi intérieur et les diamètres tangents intérieurs obtenu par

GAUSS : 29 μ
Défaut mini : 21 μ

En conclusion nous pouvons faire les mêmes observations que dans le cas du cercle. Ainsi le critère défaut de forme mini améliore le défaut de forme obtenu par gauss de 10 % au moins et ceci pour un temps de calcul multiplié par 15, ce temps de calcul reste raisonnable pour un faible nombre de points de mesure. les critères plus grand ou plus petit cylindre tangent du côté libre de la matière ne sont applicables que si les points mesurés sont répartis sur plus de la moitié du demi-cylindre. Enfin les diamètres extérieur et intérieur des cylindres obtenus par le critère défaut de forme mini sont plus près des diamètres optimaux mini ou maxi tangents extérieurs ou intérieurs que ceux obtenus par le critère de GAUSS.

5.3 Cas du plan :

Les mesures ont été effectuées sur des plans de direction générale parallèle au plan x y du marbre de la machine à mesurer. En annexe 6 nous donnons les tableaux de coordonnées des points palpés ainsi que les écarts optimisés par les critères de GAUSS et du défaut de forme mini.

Les résultats obtenus sont :

- L'orientation de la direction du plan optimisé donnée par deux angles autour des axes ox et oy.
- Le défaut de forme.
- les coordonnées suivant l'axe z des points d'intersection du plan moyen et du plan de GAUSS avec l'axe z.

Nous avons fait varier le nombre de points de mesure.

5.3.1 Résultats expérimentaux

Cas N°1 : Plan défini par 6 points.

Type de Résolution	Orientation en rd		Défaut de forme	Translation W suivant l'axe z
	suivant X	suivant Y		
GAUSS	-0.000236	0.000187	0.0096	-0.00269
Défaut mini	-0.000277	0.000188	0.0083	-0.00416
Écarts entre les deux critères	0,4 μ /100mm	0,1 μ /100 mm	1 μ 15 %	1,5 μ

Cas N°2 : Plan défini par 9 points.

Type de Résolution	Orientation		Défaut de forme	Translation w suivant l'axe z
	suivant X	suivant Y		
GAUSS	0.000132	0.000464	0.0116	-0.00207
Défaut mini	0.000196	0.000437	0.0106	-0.00061
Écarts entre les deux critères	6 μ /100 mm	3 μ /100 mm	1 μ 10 %	1,5 μ

Cas N°3 : Plan défini par 30 points.

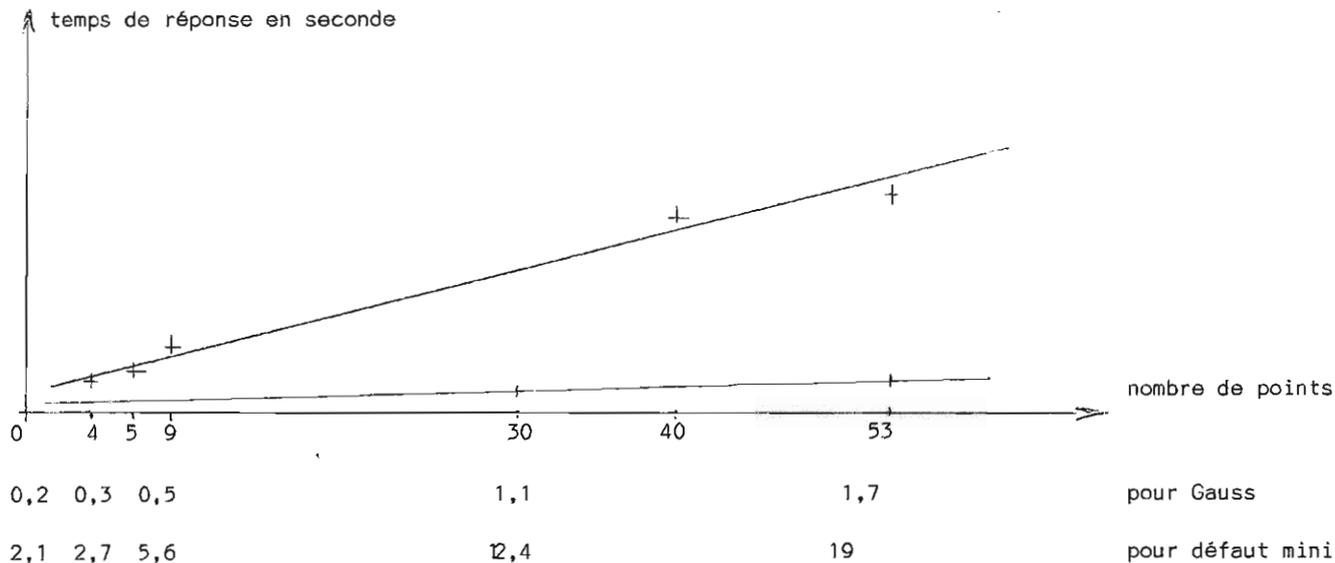
Type de Résolution	Orientation		Défaut de forme	Translation w suivant l'axe z
	suivant X	suivant Y		
GAUSS	0.002755	0.000203	0.0216	0.00935
Défaut mini	0.002798	0.000224	0.0201	0.01007
Écarts entre les deux critères	4 μ /100 mm	2 μ /100 mm	1,5 μ 7 %	0 μ

Cas N°4 : Plan défini par 53 points.

Type de Résolution	Orientation		Défaut de forme	Translation w suivant l'axe z
	suivant X	suivant Y		
GAUSS	-0.000217	0.000620	0.1727	0.07678
Défaut mini	-0.000314	0.001243	0.1647	0.05463
Écarts entre les deux critères	9 μ /100 mm	62 μ /100 mm	8 μ 5 %	22 μ

5.3.2 Influence du nombre de points sur le temps de calcul

Graphiquement les résultats sont les suivants :



Le temps de calcul pour le critère défaut mini est de l'ordre de 10 fois supérieur au temps de calcul du critère de GAUSS.

5.3.3 Variation du défaut de forme obtenu par le critère de défaut mini et le critère de GAUSS.

On a :

$$\text{gain en \%} = \frac{\text{défaut par GAUSS} - \text{défaut mini}}{\text{Défaut mini}} * 100$$

En regroupant les résultats on obtient :

Nbr de pts	Nom du fichier	Défaut GAUSS	Défaut mini	Gain	Gain en %
6	Plan1f	0.0096	0.0083	0.0013	15 %
9	Plan2f	0.0116	0.0106	0.0010	10 %
30	Plan3f	0.0216	0.0201	0.0015	7 %
53	Mandrf	0.1727	0.1647	0.0080	5 %

On remarque que le gain de défaut de forme décroît avec le nombre de points.

En métrologie on utilise le plus souvent un nombre de points situé entre 4 et 12. Le gain en défaut de forme est alors significatif et justifie le critère défaut de forme mini, par contre pour un nombre de points important le gain en défaut de forme n'est plus significatif et compte tenu des temps de calcul le critère de GAUSS est alors préférable.

5.4 Influence des points aberrants sur les résultats obtenus par les différents critères d'optimisation.

Pendant le palpéage d'une surface, il se peut que l'un des points palpés ne provienne pas de l'élément géométrique contrôlé, mais parvienne du palpéage non désiré d'un chanfrein, du contact imprévu entre la queue porte sphère du palpeur et la pièce (dans le cas de sphère de palpéage de petit diamètre); ou de tout autre aléa de mesure. Or ce genre de points modifie les résultats obtenus après optimisation.

Il paraît intéressant de mettre en évidence au moyen d'une méthode statistique les mesures aberrantes. Pour cela nous prendrons deux cas correspondant à deux types de surfaces différents (cercle, plan) en se plaçant dans le cas favorable d'une étude statistique où le nombre de points mesurés est important.

5.4.1 Cas du cercle palpé en 27 points défini dans l'étude comparative des différentes méthodes.

On introduit dans la liste des points de mesure un point aberrant en modifiant le point N°25 d'une manière significative. Ainsi l'écart de mesure passe de 0,009 à 0,210 (annexe F).

En appliquant à ce nouvel ensemble de points de mesure une optimisation suivant les critères de GAUSS et de défaut de forme mini on obtient les résultats suivants :

	Critère de GAUSS		Critère défaut de forme mini	
	sans pt aberrant	avec pt aberrant	sans pt aberrant	avec pt aberrant
Défaut de forme	0,016	0,225	0,014	0,218
Centre du cercle associé	X	160,230	160,222	160,232
	y	142,805	142,790	142,804
Diamètre du cercle moyen	32,126	31,946	32,126	32,122

Comparaison des deux résultats :

Le défaut de forme intègre le point aberrant et la différence des résultats entre les deux méthodes reste la même avec ou sans point aberrant. La valeur obtenue en défaut de forme est une bonne indication sur l'existence d'un point aberrant.

La position du centre du cercle associé est plus fortement perturbée dans le cas du critère défaut de forme mini (48 μ sur x ; 98 μ sur y) que dans le cas du critère de GAUSS (8 μ sur x ; 15 μ sur y) mais dans les deux cas les différences de cotes sont significatives respectivement 109 μ et 17 μ .

Le diamètre du cercle moyen est fortement perturbé dans la méthode de GAUSS (+ 180 μ) et reste insensible dans la méthode du défaut mini(+ 4 μ)

Validité d'une méthode statistique de détection des points aberrants appliqués aux deux critères GAUSS et défaut de forme mini :

Cette méthode consiste à faire l'hypothèse que la distribution des écarts est GAUSSIENNE, et qu'un écart optimisé e_i à l'extérieur de l'intervalle $m \pm 3\sigma$ peut être considéré avec un risque de 99,72 % d'être un point aberrant.

On vérifie bien expérimentalement que le point 25 est à l'extérieur de l'intervalle obtenu sur les écarts optimisés par Gauss, en effet on a (annexe 5) :

$m = 0,05$ $\sigma = 0,41$
soit l'intervalle $[-0,128 ; 0,117]$
avec l'écart e_{25} optimisé par Gauss égal à - 0,199

Par contre l'optimisation suivant le critère défaut de forme mini ne donne pas une répartition Gaussienne des écarts et par suite l'écart optimisé du point 25 se trouve à l'intérieur de l'intervalle $m \pm 3 \sigma$. En effet on a :

$$m = 0,05 \quad \sigma = 0,076$$

soit l'intervalle $(- 0,179 ; 0,281)$

avec e_{25} optimisé par le critère défaut de forme mini égal à $-0,05$ inclu dans l'intervalle.

5.4.2 Deuxième cas : cas du plan mesuré en 30 points étudiés précédemment.

On introduit comme dans l'étude du cercle un point aberrant, pour cela on introduit un écart de 0,2 sur le point 1 (annexe F).

On obtient les résultats suivants :

	Critère de GAUSS		Critère défaut de forme mini	
	sans pt aberrant	avec pt aberrant	sans pt aberrant	avec pt aberrant
Défaut de forme	0,0216	0,1630	0,0201	0,1449
Orientation du plan				
x	0,002757	0,003085	0,002798	0,004033
y	0,000203	-0,000062	0,000224	-0,000528

Comme dans le cas précédent on n'observe pas de différence

significative entre les résultats obtenus par les deux critères d'optimisation. La valeur du défaut de forme reste une bonne indication sur l'existence d'un point aberrant mais seul un tri statistique sur les écarts optimisés par Gauss permet de l'éliminer, en effet le point aberrant reste dans l'intervalle $\pm 3 \sigma$ lorsque l'optimisation est faite suivant le critère défaut de forme mini.

5.5 Conclusion

De cette étude nous pouvons tirer les remarques suivantes :

- * L'optimisation par le critère défaut de forme mini améliore en moyenne de 15 % le défaut de forme obtenu par le critère de Gauss. Cette amélioration est plus faible lorsque le nombre de points palpés est supérieur à 20 points. Le temps de calcul nécessaire au critère défaut de forme mini est dix fois plus important que celui nécessaire au critère de Gauss mais reste dans une limite acceptable quand le nombre de points est inférieur à 12. Par contre le temps de calcul nécessaire aux critères plus grande ou plus petite surface tangente du côté libre de la matière croît de façon exponentielle avec le nombre de points.
- * Dans tous les cas traités la surface tangente du côté libre de la matière obtenue par le critère défaut de forme mini est plus près de l'optimum (plus grande ou plus petite surface tangente du côté libre de la matière) que celle obtenue par le critère de Gauss.
- * La répartition des points sur la surface a une influence sur les résultats. Il est souhaitable de les répartir de façon régulière sur toute la surface. Dans le cas de surface fermée les critères de plus grande ou plus petite

surface tangente du côté libre de la matière ne s'applique que si les points sont répartis sur plus de la moitié de la surface.

Dans le cas d'une répartition inférieure au quart de la surface fermée, aucune des deux méthodes de Gauss et du défaut de forme mini ne donnent un meilleur résultat.

Lorsque le nombre de points palpés est statistiquement important seule la méthode de Gauss permet de détecter les points de mesure aberrants. Dans tous les cas la valeur du défaut de forme est une bonne indication sur la présence d'un point aberrant.

En conclusion, dans le cas d'un nombre de points important la méthode de Gauss allie les avantages d'un temps de calcul rapide, d'une étude statistique des écarts optimisés, d'un défaut de forme très proche du défaut de forme mini. Par contre dans les cas d'un nombre de points inférieur à 12, cas classique de la métrologie tridimensionnelle le critère défaut de forme mini a l'avantage pour un temps de calcul raisonnable de donner un résultat conforme à la norme, et dans le cas de surface fermée de donner une solution plus proche de l'optimum tangent du côté libre de la matière que la méthode de Gauss.

L'utilisation du critère plus grande ou plus petite surface tangente du côté de la matière doit être réservée à des cas particuliers où le temps de calcul n'est pas prioritaire.

Contrairement au critère de Gauss, les critères défaut de forme mini et de plus grande ou plus petite surface tangente du côté libre de la matière répondent aux spécifications de la norme.

CHAPITRE VI

VI - IDENTIFICATION TRIDIMENSIONNELLE D'UNE PIECE MECANIQUE

Les procédés d'obtention d'une pièce mécanique sont tels que les surfaces réelles qui la composent ne peuvent être superposables à un modèle géométrique idéal. On est donc amené à admettre des écarts de positions entre les surfaces.

On montre [BOU.73] que le nombre de spécifications strictement géométriques liant un ensemble de surfaces géométriques est très important. Par exemple il existe $n(n-1)/2$ dimensions entre n points situés sur une droite. Aussi on limite le nombre de spécifications en ne considérant que celles garantissant les conditions correctes de fonctionnement et d'interchangeabilité du produit [NF.84]. D'autre part la géométrie stricte est insuffisante pour exprimer correctement des conditions de fonctionnement, aussi la normalisation a défini un symbolisme de tolérancement géométrique particulier [NF.83] capable d'exprimer le caractère fonctionnel de la pièce indépendamment de l'emploi d'un procédé particulier de fabrication de mesurage ou de vérification.

Il est donc nécessaire d'étudier dans le cas d'une mesure tridimensionnelle d'une pièce mécanique les méthodes d'identification des spécifications strictement géométriques et de proposer grâce au modèle général décrit précédemment de nouvelles possibilités d'identification et par suite de vérifications directes des spécifications fonctionnelles d'une pièce mécanique.

On observe que les surfaces géométriques idéales associées sont toutes modélisées par une combinaison des trois éléments géométriques de base : le point, la droite et le plan.

Afin de satisfaire les spécifications du dessin de définition [MIT.82] on est amené à construire à partir des éléments géométriques déjà connus, de nouveaux éléments géométriques de base. L'annexe G recense différentes constructions permises par les logiciels de mesure. Toutes ces constructions répondent à des définitions géométriques strictes sauf deux d'entre-elles : l'intersection de deux droites et la construction d'un plan (ou d'une droite) symétrique de deux plans (ou de deux droites).

Le point d'intersection de deux droites n'existe que si les droites sont coplanaires (et non parallèles). En métrologie deux droites réelles n'étant jamais coplanaires leur intersection doit faire l'objet d'une interprétation, on choisit alors comme point d'intersection soit le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites, soit le pied de la perpendiculaire commune pris sur la première droite nommée, la longueur de la perpendiculaire commune donne dans ce cas une indication sur la qualité du résultat.

Le plan (ou la droite) symétrique de deux plans parallèles a en géométrie une solution unique. En métrologie les deux plans (droites) mesurés n'étant pas parallèles, le plan (la droite) de symétrie est sujet à interprétation. On choisit dans ce cas soit le plan (droite) bissecteur des deux plans (droites), soit le plan (droite) parallèle au premier plan (droite) nommé et passant par le milieu du segment joignant les deux points : "centre" des deux plans (droites).

6.1 Première approche du problème : approche géométrique.

6.1.1 Relations géométriques entre deux surfaces réelles :

Dans cette approche géométrique, les surfaces réelles sont dans un premier temps modélisées indépendamment les unes des autres par des surfaces géométriques idéales. Seules ces surfaces géométriques idéales sont, dans un deuxième temps, prises en compte, dans l'établissement des relations géométriques entre les surfaces réelles.

Ainsi chaque surface est modélisée par un élément géométrique qui tient compte également par le choix judicieux de sa représentation mathématique, de la zone de palpation de la surface. On peut proposer les représentations suivantes [BOU.79] utilisées dans PROMESUR.

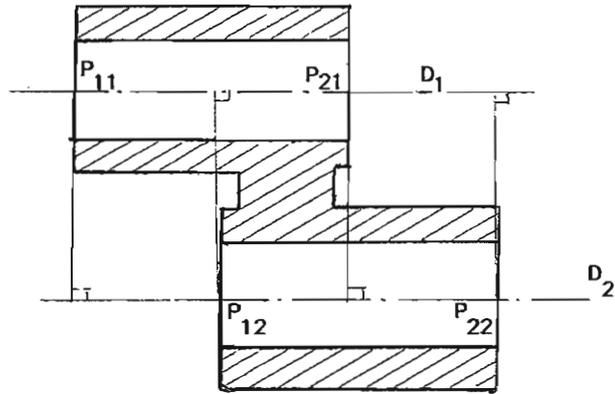
Nature de la surface fabriquée	la surface géométrique idéale associée est définie par :
Une petite surface palpée en un point	un point (centre de la sphère de palpation)
Une droite	une droite donnée par ses deux points extrêmes délimitant la zone de palpation.
Un plan	un point correspondant au centre des points palpés une normale au plan orientée vers l'extérieur de la matière.
Un cercle	le centre du cercle le rayon la normale au plan contenant le cercle.
Une sphère	le centre de la sphère le rayon.
Un cylindre	une droite donnée par les deux points extrêmes de l'axe et délimitant la zone de mesure.
Un cône	une droite donnée par les deux points extrêmes de l'axe et délimitant la zone de mesure, ainsi l'un des points correspond au plan de base. le sommet du cône le 1/2 angle au sommet.

Etablir une relation de position entre deux surfaces géométriques idéales associées revient donc à résoudre le problème du calcul de l'angle et de la distance entre les éléments géométriques de base point, droite et plan pris deux à deux.

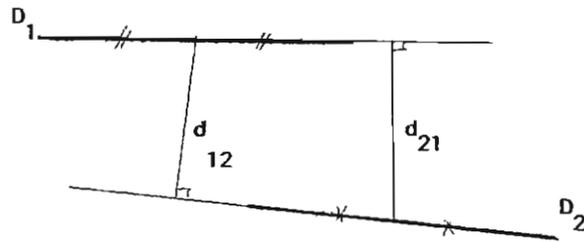
On peut recenser 6 cas types d'association d'éléments géométriques entre eux soit : point-point, point-droite, point-plan, droite-droite, droite-plan et plan-plan. On remarque immédiatement que le calcul des angles ne donne lieu à aucune ambiguïté si ce n'est sur la difficulté d'interprétation des signes des résultats. Le calcul des distances est strictement géométrique et sans ambiguïté dans les trois cas où l'un des éléments géométrique est un point, et dans les cas où les deux droites ne sont pas coplanaires, par contre les cas de distances entre deux droites parallèles, entre une droite et un plan, et entre deux plans ne trouvent pas dans cette approche de solution unique. Le choix d'une solution est laissée au métrologue ou à l'auteur du logiciel de calcul, c'est-à-dire à l'arbitraire. On se propose de recenser les solutions propres à ces différents cas :

6.1.2 Cas de la distance entre deux droites :

Une première solution consiste à construire les points d'intersection des deux droites avec les éléments géométriques limites de la surface, puis de calculer les distances entre chacun des points d'intersection et les droites D_j opposées. Le métrologue interprète ensuite les résultats.



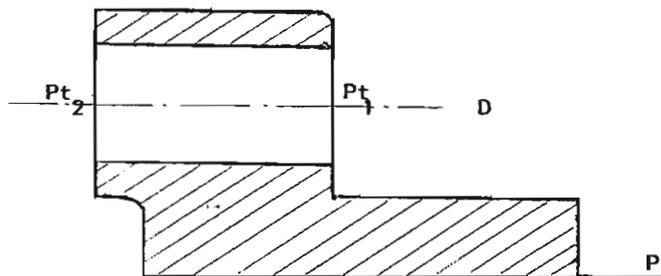
La deuxième solution revient à calculer la distance entre le point milieu d'une des deux droites à l'autre.



6.1.3. Cas d'une droite D et d'un plan P :

On peut citer quatre solutions :

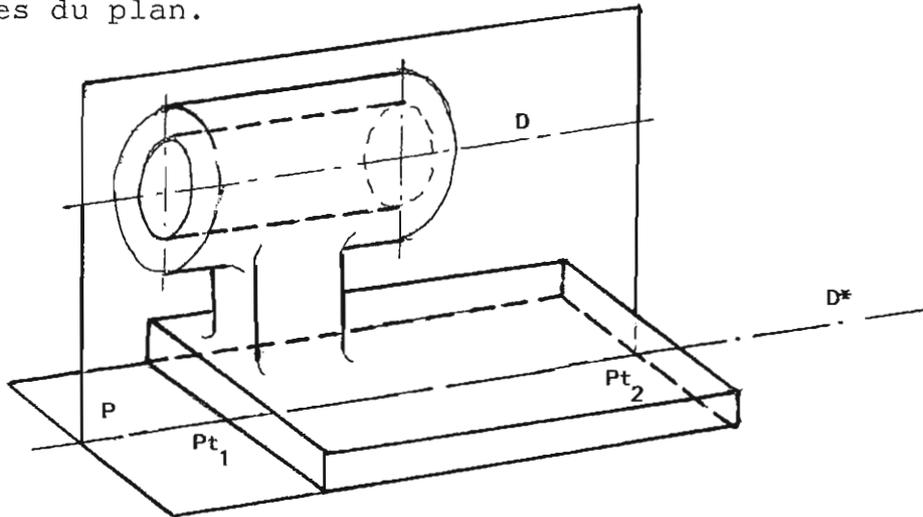
-première solution:



Après avoir construit les deux points Pt_i d'intersection de la droite D avec les surfaces limites on calcule des deux distances des deux points Pt_i au plan P . Le métrologue interprète ensuite les distances trouvées.

deuxième solution :

On construit une droite D^* intersection d'un plan perpendiculaire au plan P et contenant D , puis on détermine les deux points d'intersection Pt_i de la droite D^* et des limites du plan.



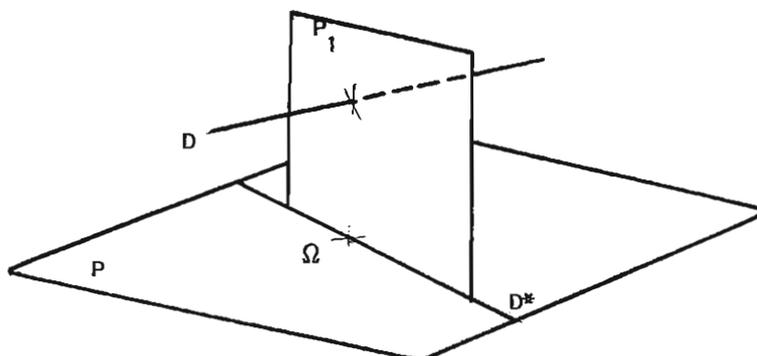
On calcule enfin les deux distances des points Pt_i à la droite D , le métrologue interprète ensuite ses résultats.

troisième solution :

Cette solution consiste à calculer la distance entre le point milieu de la droite D au plan P

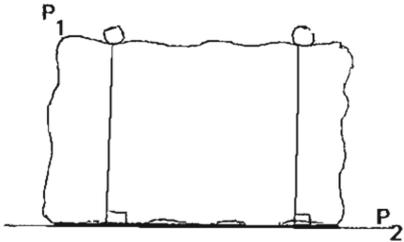
quatrième solution :

Le plan P_1 est construit perpendiculaire à D et contenant le centre du plan P . On construit ensuite la droite D^* intersection des deux plans P_1 et P . Puis on calcule enfin la distance entre les deux droites D et D^* .



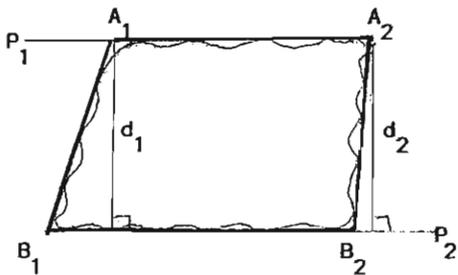
6.1.4 - Cas de deux surfaces planes :

Première solution :



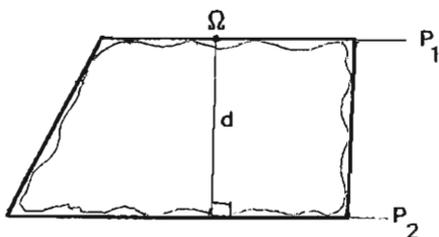
On calcule la distance des différents points de palpation de la surface P_1 à la surface idéale P_2 pris comme référence, et vice-versa. Le métrologue interprète ensuite ses résultats.

Deuxième solution :



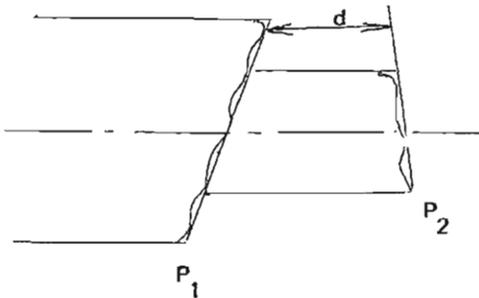
On calcule la distance entre les points anguleux de la surface P_1 et la surface idéale P_2 pris comme référence, et vice-versa. Le métrologue interprète ensuite ses résultats.

Troisième solution :



On calcule la distance entre le milieu de la surface idéale P_1 et la surface idéale P_2 , et vice-versa. Le métrologue interprète ensuite ses résultats.

Quatrième solution :



On calcule les distances entre les points palpés de la surface P_1 et la surface P_2 parallèlement à une direction donnée (par exemple l'axe d'un cylindre).

La liste de ces différentes solutions n'est pas exhaustive, en effet chaque cas de pièce nécessite de la part du métrologue une interprétation des mesures effectuées, celui-ci est donc contraint de créer des solutions géométriques adaptées aux cas de formes géométriques et de spécifications normalisées rencontrées.

La difficulté du problème posé réside dans le fait que les spécifications normalisées répondent à un critère de fonctionnement ou d'interchangeabilité de la pièce [NF.84] et non pas à une définition strictement géométrique des surfaces, pour cela il suffit de citer les spécifications de défaut de perpendicularité, de défaut de position soumis au critère de maximum de matière, etc..., le métrologue est donc contraint dans cette première approche de mesurer ou de vérifier une pièce en n'utilisant que le calcul strictement géométrique de la distance et de l'angle.

On peut néanmoins apporter une solution théorique au problème de la définition des paramètres géométriques nécessaires et suffisants à positionner deux éléments géométriques l'un par rapport à l'autre [BOU.79].

6.2 Proposition de définition des paramètres géométriques de position entre deux surfaces géométriques idéales associées à deux surfaces réelles.

Cette méthode générale de définition des paramètres de position d'un élément géométrique par rapport à un autre utilise la notion de torseurs de petits déplacements (ou torseurs d'écart).

Nous avons vu précédemment que la position de chaque surface géométrique idéale associée peut être caractérisée par un élément géométrique nominal et un torseur d'écart.

Méthode proposée :

Après avoir défini les torseurs d'écart propres à la nature des deux éléments géométriques nominaux, on leur choisit un référentiel commun tel, que son choix entraîne un maximum d'écart nuls sur les torseurs, tout en privilégiant par convention le premier élément géométrique nommé.

A chaque écart non nul correspond un écart géométrique de position ainsi qu'une dimension ou un angle entre les éléments géométriques nominaux.

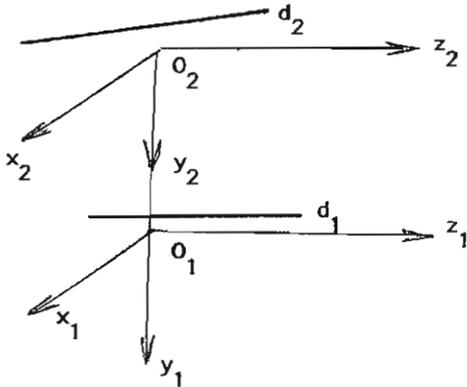
6.2.1 Paramètres géométriques entre une droite 1 et une droite 2 modélisées en deux droites parallèles.

Modèle géométrique idéal nominal :

Les deux droites nominales z_1 et z_2 sont parallèles à une distance l_0 ($O_1O_2 = l_0$).

Le référentiel lié aux deux droites modèles est défini par les deux systèmes d'axes $O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$ et $O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$, le vecteur $\vec{O_1O_2}$ est confondu avec les axes \vec{y}_1 et \vec{y}_2 .

Les deux droites associées n'étant pas confondues avec les deux droites nominales z_1 et z_2 leurs positions peuvent être caractérisées par deux torseurs d'écart.



$$[\tau]_1 \begin{cases} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{cases} \quad [\tau]_2 \begin{cases} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux droites parallèles:

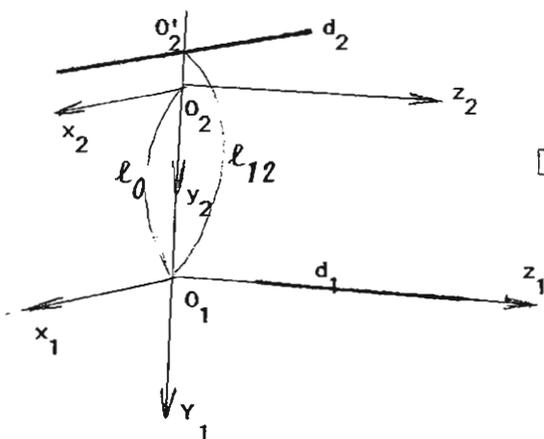
Le référentiel lié aux deux droites modèles est choisi tel que le maximum d'écart des deux torseurs (τ_1) et (τ_2) soient nuls en privilégiant le premier élément géométrique :

l'axe \vec{z}_1 est choisi confondu avec la droite associée d_1 soit : $\alpha_1 = \beta_1 = u_1 = v_1 = 0$

O_1 est la projection sur \vec{z}_1 du milieu O'_2 de la droite d_2 .

le point O_2 est choisi sur la droite $O_1O'_2$ soit $u_2 = 0$

le repère est alors entièrement défini, il reste 3 écarts non nuls α_2 , β_2 et v_2 .



$$[\tau]_1 \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ 0 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ 0 \end{cases} \quad [\tau]_2 \begin{cases} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 \\ 0 \end{cases}$$

Les 3 écarts non nuls v_2 , α_2 , β_2 correspondent à trois écarts géométriques de position ainsi qu'à la distance nominale l_0 et aux deux angles nominaux autour des 2 axes \vec{x}_2 et \vec{y}_2 .

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

- une distance $l_{12} = l_0 + v_2$
- deux angles $0 + \alpha_2$
 $0 + \beta_2$

6.2.2 Paramètres géométriques entre une droite d_2 et une droite d_1 .

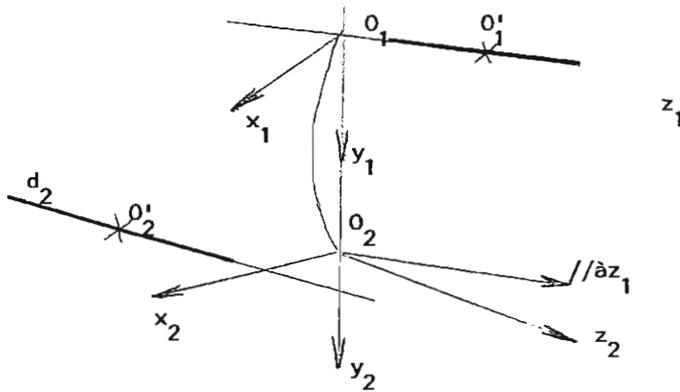
On procède de la même façon que précédemment avec la droite d_2 prise comme référence privilégiée.

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

- une distance $l_{21} = l_0 + v_1$
- deux angles $0 + \alpha_1$
 $0 + \beta_1$

On remarque que les distances l_{21} et l_{12} entre deux mêmes droites sont différentes.

6.2.3 Paramètres géométriques entre deux droites quelconques faisant un angle θ .



$$[\tilde{\zeta}_1] \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ O_1 \end{cases}$$

$$[\tilde{\zeta}_2] \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ O_2 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ O_2 \end{cases}$$

Modèle géométrique idéal nominal :

Deux droites nominales z_1 et z_2 distantes de l_0 suivant la perpendiculaire communes, faisant entre-elles un angle θ .

* Choix du référentiel commun aux deux droites

z_1 confondu avec la droite associée ($\alpha_1 = \beta_1 = 0$
 $u_1 = v_1 = 0$)

$O_1 O_2 = l_0$ sur la perpendiculaire commune aux deux droites
 d_1 et d_2 ($\alpha_2 = u_2 = 0$)

O_1 sur d_1 .

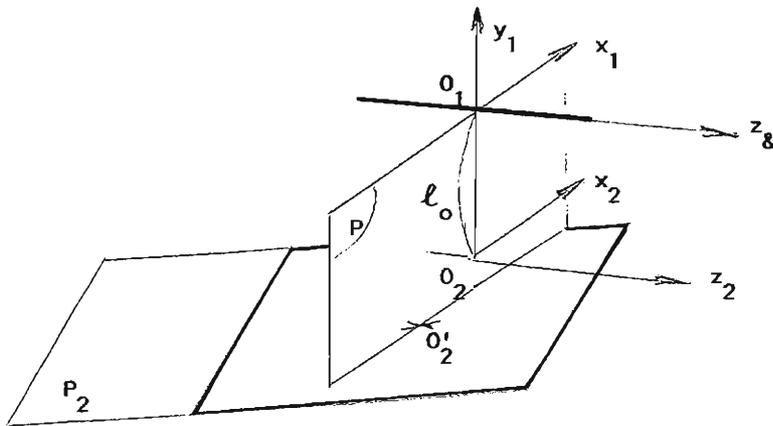
* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

la distance $l_{12} = l_0 + v_2$

l'angle des deux droites suivant \vec{z}^* : $\theta + \beta_2$.

Remarque : la distance l_{12} est égale à la distance l_{21} .

6.2.4 Paramètres géométriques entre une droite 1, un plan 2 à une distance l_0



$$[\tilde{\tau}]_1 \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ O_1 \end{cases}$$

$$[\tilde{\tau}]_2 \begin{cases} \alpha_2 \\ O_2 \\ \gamma_2 = 0 \\ O_2 \\ v_2 \\ O_2 \end{cases}$$

* Modèle géométrique idéal nominal

Une droite nominale \vec{z}_1 parallèle et à une distance l_0 d'un plan nominal \vec{x}_2, \vec{z}_2 .

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

axe \vec{z}_1 confondu avec la droite associée

$$d_1 (\alpha_1 = \beta_1 = u_1 = v_1 = 0)$$

les axes \vec{x}_1 et \vec{x}_2 sont parallèles à l'intersection du plan P_2 et du plan P passant par O'_2 et perpendiculaire à

$$d_1 (\gamma_2 = 0)$$

O_1 est l'intersection de P et de d_1

O_2 est sur la droite $(O_1 O_2) \perp$ à P_2

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

La distance entre la droite 1 et le plan P_2 :

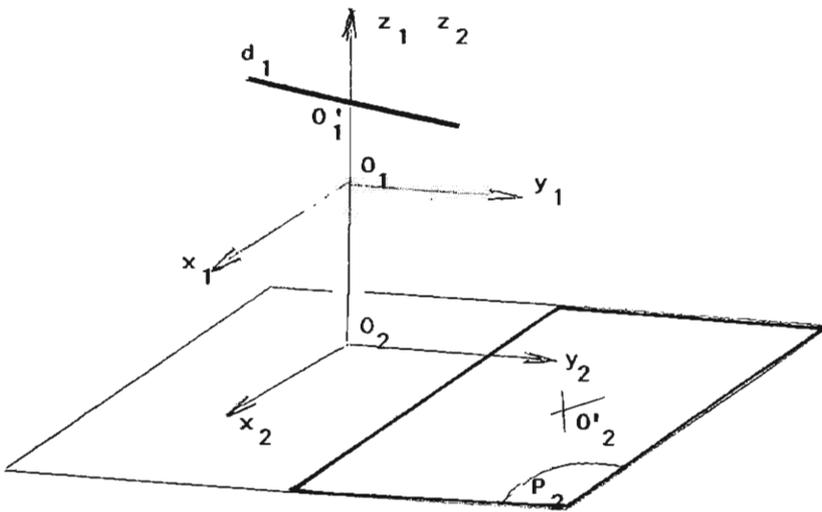
$$l_{12} = l_0 + v_2$$

un angle autour de \vec{x} : $0 + \alpha_2$.

6.2.5 Paramètres géométriques entre un plan 2 et une droite 1 parallèles et à une distance nominale l_0

* Modèle géométrique idéal nominal

Une droite nominale \vec{y}_1 parallèle et à une distance l_0 d'un plan nominal $\vec{x}_2\vec{y}_2$.



* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

O_2 projection du milieu O'_1 de d_1 sur P_2
 $\vec{z}_1 \perp P_2$; $O_2O_1 = l_0$
 \vec{x}_2 et $\vec{x}_1 \perp (\vec{d}_1, \vec{z}_1)$ ($\gamma_1 = 0$).

* De la même façon qu'au paragraphe 624 la métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

la distance entre le plan 2 et la droite 1 :

$$l_{21} = l_0 + w_1$$

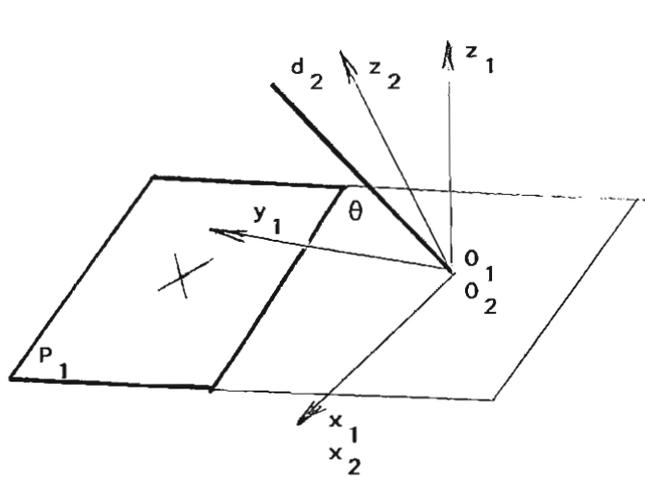
un angle d'axe \vec{x}_1 : $0 + \alpha_1$

On remarque que $l_{12} \neq l_{21}$. (du paragraphe 624).

6.2.6 Paramètres géométriques entre un plan 1 et une droite 2 inclinée d'un angle θ .

* Modèle géométrique idéal nominal

1 plan $P_1(x_1y_1)$ et une droite (z_2) faisant un angle θ



$$[\tilde{\gamma}_1] \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 \\ 0 \\ 0 \\ w_1 = 0 \end{cases} \quad [\tilde{\gamma}_2] \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ O_2 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ 0 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

P plan passant par la droite associée d_2 et perpendiculaire à P_1

O_1 intersection de d_2 et de P_1 ($u_2=v_2=w_1=0$)

y_1 intersection de P_1 et de P ($\alpha_1=\beta_1=0$)

$z_1 \perp$ à P_1

O_1 et O_2 ; x_1 et x_2 sont confondus ($\beta_2=0$.)

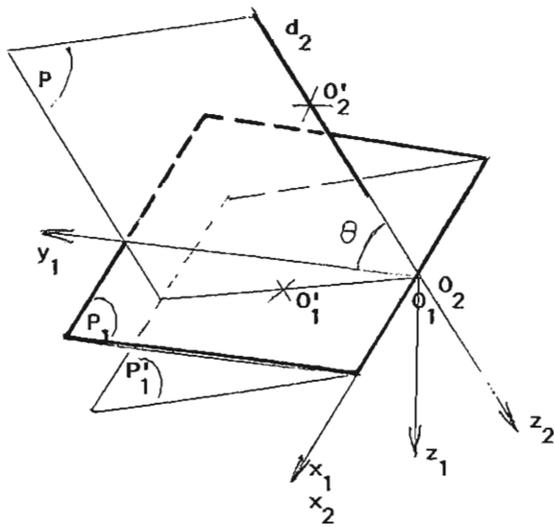
* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

$$\text{l'angle } \theta_{12} = \theta + \alpha_2.$$

6.2.7 Paramètres géométriques entre une droite 2 et un plan 1 inclinés d'un angle θ :

* Modèle géométrique idéal nominal

Une droite nominale (\vec{z}_2) et un plan nominal (\vec{x}_1, \vec{y}_1) faisant un angle θ .



$$[\tilde{\gamma}_1] \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 = 0 \\ O = 0 \\ O = 0 \\ w_1 = 0 \end{cases}$$

$$[\tilde{\gamma}_2] \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ O_2 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ O_2 = 0 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

L'axe \vec{z}_2 est confondu avec la droite associée d_2 :

$$\alpha_2 = \beta_2 = u_2 = v_2 = 0$$

P plan passant par d_2 et perpendiculaire à P'_1

\vec{x}_2 et \vec{x}_1 confondu ($P_1 \cap P'_2$)

O_2 et O_1 confondus : intersection de d_2 et de P'_1
 $(\vec{z}_2, \vec{y}_1) = \theta$.

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

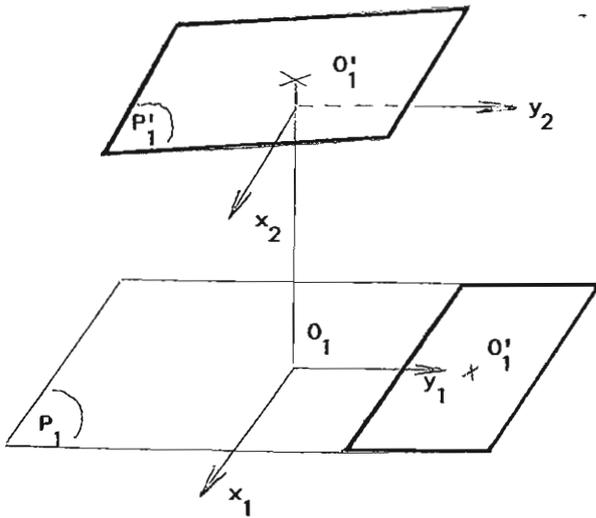
$$\text{l'angle } \theta_{21} = \theta + \alpha_1.$$

On remarque que $\theta_{12} = \theta_{21}$.

6.2.8 Paramètres géométriques entre plan 1 et plan 2 parallèles à la distance l_0 :

* Modèle géométrique idéal nominal

2 plans (\vec{x}_1, \vec{y}_1) et (\vec{x}_2, \vec{y}_2) parallèles distants de l_0 .



$$\begin{cases} [\tilde{\zeta}_1] \\ \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\tilde{\zeta}_2] \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_2 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

O_1 projection de O'_2 sur P_1 $w_1 = 0$
 \vec{x}_1 et \vec{y}_1 choisis arbitrairement dans P_1 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$
 \vec{x}_2, \vec{y}_2 respectivement parallèles à \vec{x}_1 et \vec{y}_1
 O_2 sur la droite $O'_2 O_1$ avec $O_2 O_1 = l_0$.

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

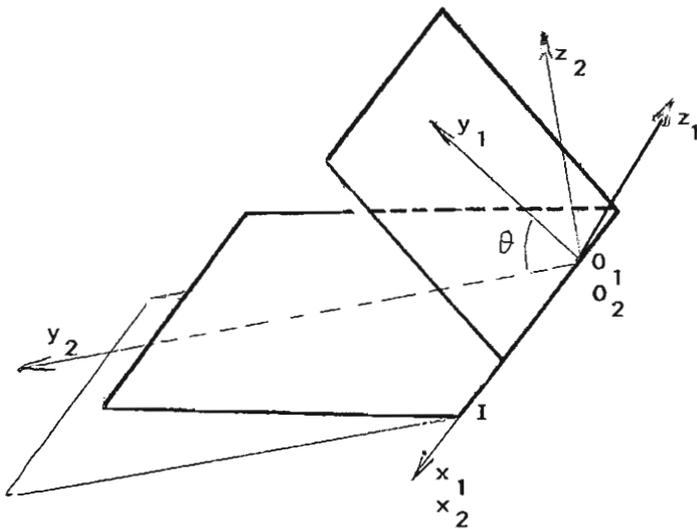
la distance entre le plan 1 et le plan 2 : $l_0 + w_2 = l_{12}$
 l'angle d'axe \vec{x}_2 $0 + \alpha_2$
 l'angle d'axe \vec{y}_2 $0 + \beta_2$

Remarque : si l'on cherche les paramètres du plan 2 au plan 1 on procède de la même façon. On constate que la distance l_{21} ainsi trouvée est différente de la distance l_{12} précédente.

6.2.9 Paramètres géométriques entre un plan 1 et un plan 2 inclinés d'un angle θ

*Modèle géométrique idéal nominal

Deux plans $(\vec{x}_1\vec{y}_1)$ et $(\vec{x}_2\vec{y}_2)$ faisant un angle θ .



$$[\tilde{\zeta}_1] \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ O_1 = 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_1 = 0 \end{cases}$$

$$[\tilde{\zeta}_2] \begin{cases} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ O_2 \\ 0 \\ 0 \\ w_2 = 0 \end{cases}$$

* Choix du référentiel commun aux deux éléments :

\vec{x}_1 et \vec{x}_2 sont confondus avec l'intersection I des 2 plans
 ($\beta_1 = \beta_2 = 0$)
 O_1 et O_2 confondus sont choisis sur I : ($w_1 = w_2 = 0$)
 \vec{y}_1 est contenu dans P_1 ($\alpha_1 = 0$)
 $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \theta$.

* La métrologie de ces deux éléments peut être caractérisée par :

l'angle des deux plans $\theta_{12} = \theta + \alpha_2$.

On a $\theta_{12} = \theta_{21}$.

6.3 Deuxième approche du problème : métrologie fonctionnelle.

Cette nouvelle approche ne consiste plus à considérer la pièce comme un assemblage de surfaces géométriques idéales élémentaires entre lesquelles on établit des relations géométriques strictes, mais comme un ensemble de regroupement de surfaces, chaque regroupement répondant globalement et de manière optimale à un critère géométrique fonctionnelle spécifié par un symbolisme. Cette approche permet de se rapprocher de la cotation fonctionnelle et des notions de calibre utilisées depuis toujours en contrôle géométrique classique des pièces mécaniques et permet d'augmenter les tolérances des pièces fabriquées.

Cette nouvelle approche du problème est en quelque sorte une métrologie fonctionnelle de la pièce. Elle s'applique donc à tout regroupement fonctionnel de surfaces sans restriction ni sur leur nombre, ni sur leur orientation relative.

Je me propose d'étudier les mêmes cas de l'approche strictement géométrique ou le calcul des distances entre deux surfaces nécessitait la construction de nouveaux éléments géométriques et une interprétation des résultats par le métrologue.

6.3.1 Distance entre deux plans P_1 et P_2 .

Les deux surfaces réelles sont respectivement connues par les deux ensembles E_1 et E_2 de points palpés.

Le modèle géométrique de distance entre deux plans s'adresse à deux plans parallèles. Aussi la distance entre les deux surfaces sera celle obtenue entre deux plans parallèles tangents du côté libre de la matière et pouvant répondre à l'un des cinq critères d'optimisation suivants:

- critère de Gauss sur l'ensemble des écarts,
- critère de défaut de forme mini sur l'ensemble des écarts,
- critère de plus petite distance entre deux plans parallèles tangents extérieurs.
- critère de plus grande distance entre deux plans parallèles tangents intérieurs,
- critère de défaut de forme mini sur l'un des deux éléments et plus grande ou plus petite distance intérieure ou extérieure.

A chaque critère d'optimisation choisi on remarque:

- que la distance entre deux plans est unique et n'est plus soumise au choix arbitraire du métrologue,
- que les trois derniers critères proposés répondent bien à une fonctionnalité de guidage ou d'assemblage,
- que la construction d'un plan de symétrie de deux plans parallèles se fait sans aucune ambiguïté.

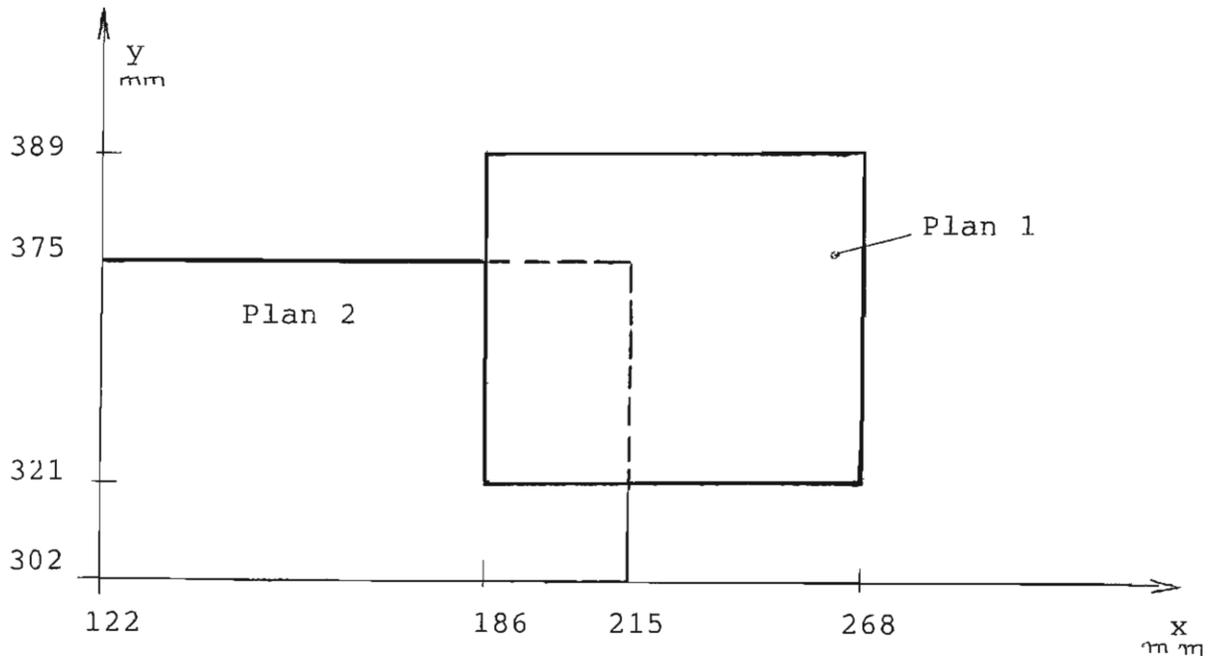
Les mises en équations de l'optimisation suivant les cinq critères sont immédiates, elles sont identiques à celles décrites au chapitre 4 dans le cas du plan. Le torseur des petits déplacements possède trois composantes : une translation w et deux rotations α et β .

Nous donnons un exemple de distance entre deux plans mesurés respectivement en 9 et 30 points.

Pris individuellement les deux plans ont respectivement comme défaut de forme :

Défaut de forme	Critère de Gauss	Critère de défaut mini
Plan 1	0,011	0,010
Plan 2	0,021	0,02

Les coordonnées des points mesurés sont situées dans les enveloppes suivantes :



Les coordonnées des points mesurés sont :

Plan 1 défini par 9 points mesurés					
Point	N°	Abscisse	Coordonnée	cote	Ecart \sum_i
1		268.024	386.542	-437.043	0.00000
2		268.025	357.542	-437.050	0.00700
3		268.025	321.737	-437.051	0.00800
4		223.233	321.737	-437.032	0.01100
5		223.234	357.748	-437.035	0.00800
6		223.238	389.155	-437.026	0.01700
7		186.069	389.156	-437.002	0.04100
8		186.070	355.810	-437.012	0.03100
9		186.070	322.799	-437.015	0.02800

Plan 2 défini par 30 points mesurés				
Point N°	Abscisse	Coordonnée	cote	Ecart ξ_i
1	215.061	375.352	-396.173	0.00000
2	215.061	356.234	-396.222	-0.04900
3	215.062	337.773	-396.269	-0.09600
4	215.063	320.046	-396.315	-0.14200
5	215.063	302.763	-396.356	-0.18300
6	196.554	302.764	-396.355	-0.18200
7	196.555	319.844	-396.319	-0.14600
8	196.554	337.279	-396.273	-0.10000
9	196.554	356.175	-396.212	-0.03900
10	196.554	374.774	-396.157	0.01600
11	176.649	374.775	-396.153	0.02000
12	176.651	356.003	-396.209	-0.03600
13	176.651	337.891	-396.262	-0.08900
14	176.651	319.769	-396.311	-0.13800
15	176.651	302.449	-396.352	-0.17900
16	157.644	302.450	-396.352	-0.17900
17	157.645	319.327	-396.308	-0.13500
18	157.645	338.265	-396.250	-0.07700
19	157.645	355.928	-396.198	-0.02500
20	157.645	373.958	-396.147	0.02600
21	140.116	373.958	-396.140	0.03300
22	140.117	355.831	-396.201	-0.02800
23	140.117	338.131	-396.253	-0.08000
24	140.117	319.368	-396.305	-0.13200
25	140.117	302.733	-396.350	-0.17700
26	122.061	302.734	-396.342	-0.16900
27	122.061	319.226	-396.302	-0.12900
28	122.062	337.733	-396.253	-0.08000
29	122.062	355.052	-396.209	-0.03600
30	122.062	373.728	-396.156	0.01700

Résultats obtenus suivant différents critères appliqués globalement aux deux plans :

Critère de GAUSS

écart de forme obtenu :

- sur l'ensemble des 2 plans : 0,140
- sur le plan 1 : 0,140
- sur le plan 2 : 0,061.

Distance moyenne..... : 40,796
Distance mini extérieure : 40,896
Distance maxi intérieure : 40,695.

Critère distance maxi intérieure :

écart de forme obtenu

- sur l'ensemble des deux plans : 0,175
- sur le plan 1 : 0,175
- sur le plan 2 : 0,024.

Distance maxi intérieure : 40,706.

Critère distance mini extérieure :

écart de forme obtenu

- sur l'ensemble des deux plans : 0,211
- sur le plan 1 : 0,024
- sur le plan 2 : 0,211.

Distance mini extérieure : 40,856.

Critère défaut de forme mini :

écart de forme obtenu :

- sur l'ensemble des deux plans : 0,167
- sur le plan 1 : 0,167
- sur le plan 2 : 0,091.

Distance moyenne: 40,798
Distance mini extérieure : 40,897
Distance maxi intérieure : 40,700.

Critère défaut de forme mini sur plan 1

écart de forme :

- sur le plan 1 : 0,011
- sur le plan 2

Distance moyenne:
Distance mini extérieure :
Distance maxi intérieure :

Critère défaut de forme mini sur plan 2 :

écart de forme :

- sur le plan 1 : 0,010
- sur le plan 2 :

Distance moyenne.....:

Distance mini extérieure :

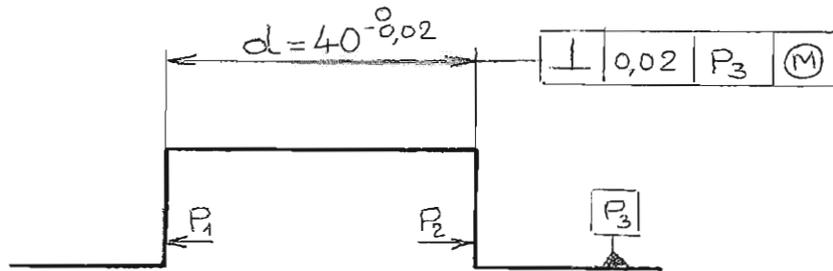
Distance maxi intérieure :

On remarque que chaque résultat donne bien une seule distance, en effet le modèle géométrique, nominal choisi est ici deux plans parallèles. Le critère d'optimisation peut également tenir compte de la fonction de la pièce dans son mécanisme, ainsi les deux critères distance maxi intérieure et distance mini extérieure correspondent à la fonction de guidage d'une pièce femelle et d'une pièce mâle. Le critère défaut de forme mini sur l'un des plans correspond à l'assemblage de deux pièces avec liaison complète sur le plan considéré. Quant au critère de Gauss ou de défaut de forme mini sur l'ensemble des deux plans, celui-ci n'a pas de fonctionnalité directe, il donne une solution globale correspondant à la mesure d'une surface constituée de deux plans.

Cette notion de métrologie fonctionnelle étendue à plus de deux surfaces permet également de résoudre les problèmes posés par les indications fonctionnelles de maximum de matière.

6.3.2 Métrologie fonctionnelle de 3 surfaces planes

A titre d'exemple traitons le cas d'un regroupement de 3 surfaces : distance entre deux plans parallèles P_1 et P_2 perpendiculaires à un troisième plan spécifié P_3 et "cotés au maximum de matière" par une tolérance de perpendicularité.



On suit la procédure suivante :

- a) - Les surfaces P_1 , P_2 et P_3 sont dans un premier temps modélisées par des plans optimisés indépendemment les uns des autres suivant :
 - le critère de GAUSS pour obtenir les écarts types de la distribution des écarts de forme et vérifier d'éventuels aléas de mesure.
 - Le critère défaut de forme mini pour définir le défaut de forme et une première modélisation de chaque surface par des plans tangents du côté libre de la matière.
- b) - Les deux surfaces P_1 et P_2 sont optimisées par deux plans parallèles suivant le critère distance mini extérieure. On obtient ainsi la distance d_{12} .

c) - Les deux surfaces P_1 et P_2 sont de nouveau optimisées par deux plans parallèles mais restant perpendiculaires au plan idéal associé à la surface P_3 , suivant le critère distance mini extérieure.

Pour cela on utilise les mêmes équations qu'en b en supprimant la rotation autour de l'axe parallèle à l'intersection des plans nominaux P_1 et P_3 .

On obtient ainsi une nouvelle distance d_{12}^* .

L'écart de perpendicularité est $|d_{12}^* - d_{12}|$.

La vérification de l'ensemble de la cotation au maximum de matière se traduit par :

$$40 \leq d_{12} \leq 39,98$$

et $d_{12}^* \leq 40,02$.

6.3.3 Distance entre l'axe d'un cylindre (ou d'un cône) et d'un plan P

Les deux surfaces réelles sont connues par deux ensembles de points.

Le modèle géométrique nominal est un cylindre (ou un cône) d'axe parallèle au plan P.

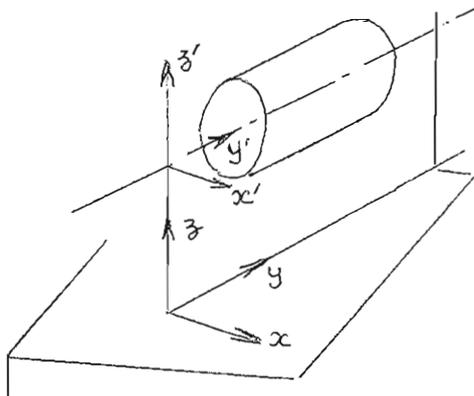
Comme dans le cas précédent la métrologie fonctionnelle permet de calculer la distance suivant l'un des critères :

- Critère des moindres carrés sur l'ensemble des écarts,
- Critère du défaut de forme mini sur l'ensemble des écarts,
- Critère de défaut de forme mini ou des moindres carrés, puis calcul de la distance en optimisant le cylindre suivant l'un des 4 critères :

moindres carrés, défaut de forme mini, plus grand cylindre (ou cône) tangent intérieur, plus petit cylindre (ou cône) tangent extérieur,

- optimisation du cylindre (ou du cône) par l'un des 4 critères : moindres carrés, défaut de forme mini, plus grand ou plus petit cylindre (cône) tangent intérieur ou extérieur puis calcul de la distance optimisée par le critère des moindres carrés ou de défaut de forme mini sur le plan

Les mises en équations se font suivant la méthode générale décrite au chapitre 4. Ainsi on obtient dans le système d'axes décrit ci-dessous les équations suivantes:



OO' distance nominale
Le torseur inconnu caractérisant le petit déplacement est de rang 5

$$[\tilde{L}_{O'}] \begin{cases} \alpha & \vec{R} \\ \beta & \\ \gamma & \\ u & \\ 0 & \vec{D}_{O'} \\ w & \end{cases}$$

Cas du critère des moindres carrés sur l'ensemble des deux surfaces.

soit Δd la variation de la distance nominale OO' sur le plan on a :

$$e_i = \xi_i + \Delta d - (\alpha y - \beta x)$$

sur le cylindre

$$e_j = \xi_j (y_j \sin \theta_j - y_j \cos \theta_j + u \cos \theta_j + w \sin \theta_j)$$

Puis on optimise par GAUSS en formant la fonction

$$W = \sum e_i^2 + \sum e_j^2 \text{ et}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial w} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \Delta d} = 0$$

Cas du critère de défaut de forme mini sur l'ensemble des deux surfaces , on obtient :

Pour tout point de mesure du plan

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 + y_i (\alpha_1 - \alpha_2) + x_i (\beta_1 - \beta_2) + w_1 - w_2 - K_i = \xi_i$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 + y_i (\alpha_1 - \alpha_2) + x_i (\beta_1 - \beta_2) + w_1 - w_2 + L_i = \xi_i$$

Pour tout point du cylindre

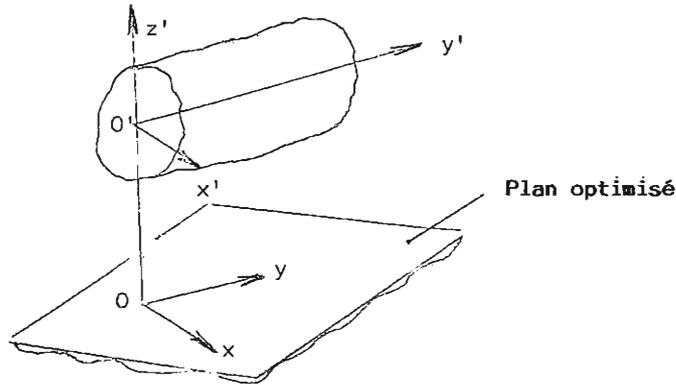
$$\Delta S_1 - \Delta S_2 - y_j \sin \theta_j (\alpha_2 - \alpha_1) + y_j \cos \theta_j (\gamma_1 - \gamma_2) + \cos \theta_j (u_1 - u_2) + \sin \theta_j (v_1 - v_2) - M_j = \xi_j$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 + y_j \sin \theta_j (\alpha_2 - \alpha_1) + y_j \cos \theta_j (\gamma_1 - \gamma_2) + \cos \theta_j (u_1 - u_2) + \sin \theta_j (v_1 - v_2) - N_j = \xi_j$$

Fonction objectif $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2$ minimum.

Cas où l'on privilégie le plan :

- Le plan étant optimisé on lui attache le système d'axe
o \vec{x} \vec{y} \vec{z}



Le torseur de petit déplacement permettant d'optimiser le cylindre se ramène au maximum à 2 composantes $w \vec{z}'$ et $\gamma \vec{z}'$ au lieu des 5 étudiées dans le cas général. En effet, 3 composantes du torseur $\alpha \vec{x}'$ $\beta \vec{y}'$ u \vec{x} sont nulles du fait que l'on oblige l'axe du cylindre à rester parallèle au plan $\vec{x}\vec{y}$.

L'optimisation du cylindre peut alors se faire suivant les quatre critères proposés au chapitre 4.

On remarque que dans le cas des critères plus petit ou plus grand cylindre tangent extérieur ou intérieur en prenant un diamètre nominal égal au diamètre mini de l'alésage ou maxi de l'arbre de la pièce complémentaire et en imposant la translation $w \vec{z}'$ nulle, on vérifie directement la fonction assemblage de la pièce, ou encore une cotation au maximum de matière sur le parallélisme.

Cas où l'on privilégie le cylindre :

- Le cylindre étant optimisé on lui attache le système d'axe $o \vec{x}' \vec{y}' \vec{z}'$.

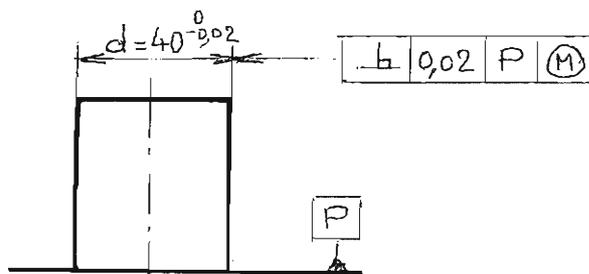
Le torseur de petit déplacement permettant d'optimiser le plan se ramène à une composante $\beta \vec{y}$, les deux autres composantes $w \vec{z}$ et $\alpha \vec{x}$ sont nulles du fait que l'on oblige le plan optimisé à rester parallèle à l'axe du cylindre.

Les mises en équations suivant des différents critères sont identiques à celles décrites au chapitre.4

On peut citer les 4 critères :

- critère de GAUSS,
- critère de défaut de forme mini,
- critère de distance maxi,
- critère de distance mini.

6.3.4 Métrologie fonctionnelle d'un cylindre de diamètre d et perpendiculaire à un plan P coté au maximum de matière.



On suit la procédure suivante :

- le cylindre et le plan sont dans un premier temps modélisés l'un et l'autre suivant le critère de GAUSS afin de vérifier la distribution des écarts de forme et mettre en évidence d'éventuels aléas de mesure.

- b) - le cylindre est modélisé par le plus petit cylindre tangent extérieur de diamètre d .
- c) - le plan est modélisé par le plan P de défaut de forme mini et tangent du côté libre de la matière.
- d) - le cylindre est de nouveau modélisé par le plus petit cylindre tangent extérieur de diamètre d^* et d'axe perpendiculaire au plan P . Ce qui correspond dans l'optimisation à prendre les 2 petites rotations autour des deux axes $\vec{o_x}$ $\vec{o_y}$ du plan P égales à zéro.

La vérification de l'ensemble de la cotation au maximum de matière se traduit par :

$$40 \leq d \leq 39,98$$

et

$$d^* \leq 40,02.$$

L'écart de perpendicularité étant $|d^* - d|$.

6.3.5 Distance entre deux axes de cylindres (ou de cônes) parallèles.

Les deux surfaces réelles sont connues par deux ensembles de points.

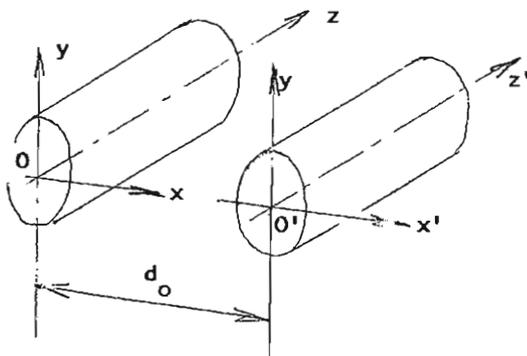
Le modèle géométrique nominal est constitué de deux cylindres (ou de deux cônes) d'axes parallèles distants de la dimension nominale .

La métrologie fonctionnelle permet de calculer la distance suivant l'un des critères :

- Moindres carrés sur l'ensemble des écarts,
- défaut de forme mini sur l'ensemble des écarts,
- optimisation de l'un des deux cylindres (ou cônes) par l'un des quatre critères de base :
 - . moindres carrés,
 - . défaut de forme mini,
 - . plus grand cylindre tangent intérieur,
 - . plus petit cylindre tangent extérieur,

puis optimisation de l'autre cylindre (ou cône) par l'un des quatre critères de base, avec ou sans optimisation de la distance nominale d_0 .

Les mises en équations se font suivant la méthode générale décrite au chapitre 4. On obtient dans le système d'axes (chapitre 5) décrit ci-dessous les équations suivantes :



OO' distance nominale d_0
 Le torseur inconnu caractérisant le petit déplacement est de rang 5

$$[\zeta_0] \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ u \\ v \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \\ \Omega \\ \rightarrow \\ D_0 \end{matrix}$$

Cas du critère des moindres carrés sur l'ensemble des deux surfaces :

Si Δd est la variation de la distance nominale on a :

sur le cylindre (O) :

$$e_i = \xi_i - (-z_i \sin \theta_i \alpha + z_i \cos \theta_i \beta + u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)$$

sur le cylindre (O') :

$$e'_j = \xi'_j - (-z_j \sin \theta_j \alpha + z_j \cos \theta_j \beta + (u + \Delta d) \cos \theta_j + v \sin \theta_j + d_0 \sin \theta_j \gamma)$$

Puis on optimise par GAUSS en formant la fonction

$$W = \sum e_i^2 + \sum e_j^2$$

et on obtient 6 équations à 6 inconnues :

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \Delta d} = 0$$

Cas du critère de défaut de forme mini sur l'ensemble des deux surfaces :

Pour tout point i du cylindre (O) on a :

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - K_i = \xi_i$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 - z_i \sin \theta_i (\alpha_1 - \alpha_2) + z_i \cos \theta_i (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_i (u_1 - u_2) + \sin \theta_i (v_1 - v_2) - T_i = \xi_i$$

Pour tout point j du cylindre (O') on a :

$$\Delta S_1 - \Delta S_2 - z_j \sin \theta_j (\alpha_1 - \alpha_2) + z_j \cos \theta_j (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_j (u_1 - u_2) + \cos \theta_j (\Delta d_1 - \Delta d_2) + \sin \theta_j (v_1 - v_2) + d_0 \sin \theta_j (\gamma_1 - \gamma_2) - K_j = \xi_i.$$

$$\Delta I_1 - \Delta I_2 - z_j \sin \theta_j (\alpha_1 - \alpha_2) + z_j \cos \theta_j (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_j (u_1 - u_2) + \cos \theta_j (\Delta d_1 - \Delta d_2) + \sin \theta_j (v_1 - v_2) + d_0 \sin \theta_j (\gamma_1 - \gamma_2) + T_j = \xi_j.$$

Fonction objectif $Z = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta I_1 + \Delta I_2$ minimum.

Cas où l'on privilégie un des cylindres : par exemple le cylindre O.

Le cylindre O étant optimisé par l'un des quatre critères d'optimisation de base, le deuxième cylindre est optimisé par le torseur τ_0 $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ 0 \end{array} \right\}$ exprimé dans

un repère $O \vec{x} \vec{y} \vec{z}$ dont l'axe Oz est confondu avec l'axe du cylindre (O) optimisé. On a donc : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $u = 0$, $v = 0$, dans la mise en équation de l'optimisation du deuxième cylindre (O') soit :

Critère de GAUSS :

$$e'_j = \xi'_j - (\Delta d \cdot \cos \theta_j + d_0 \sin \theta_j \gamma)$$

$$\text{et } W' = \sum e'_j{}^2$$

On obtient 2 équations à 2 inconnues :

$$\frac{\partial W'}{\partial \Delta d} = 0 \quad \frac{\partial W'}{\partial \gamma} = 0.$$

Critère du défaut de forme mini :

$$\Delta S'_1 - \Delta S'_2 + \cos \theta_j (\Delta d_1 - \Delta d_2) + d_0 \sin \theta_j (\gamma_2 - \gamma_1) - K_j = \xi_i$$

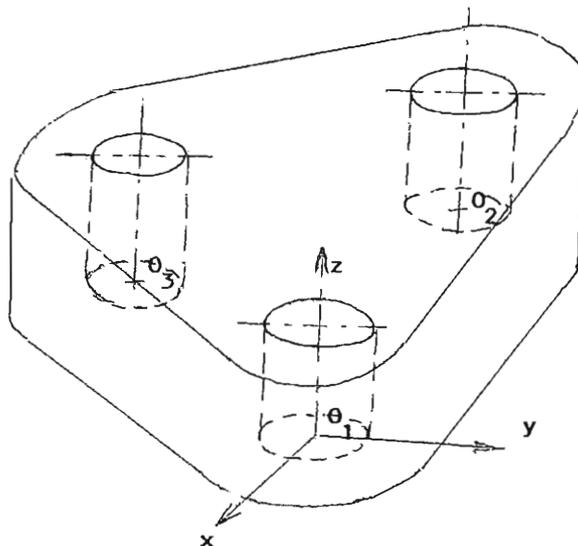
$$\Delta I'_1 - \Delta I'_2 + \cos \theta_j (\Delta d_1 - \Delta d_2) + d_0 \sin \theta_j (\gamma_2 - \gamma_1) + T_j = \xi_i$$

avec $Z' = \Delta S'_1 - \Delta S'_2 - \Delta I'_1 + \Delta I'_2$ minimum.

La mise en équation est immédiate dans les cas des deux critères plus grand cylindre tangent intérieur ou plus petit cylindre tangent extérieur.

6.3.6 Métrologie fonctionnelle de n cylindres (alésages) parallèles avec une condition d'assemblage sur n arbres.

a) Sans condition de perpendicularité avec un plan.



Chaque cylindre (C_1, C_2, \dots, C_n) est connu par un ensemble (E_1, E_2, \dots, E_n) de points mesurés. On suit la procédure suivante :

- a) - On associe dans un premier temps à chaque ensemble (E_k) un cylindre des moindres carrés pour détecter de manière statistique d'éventuels aléas de mesure.
- b) - On modélise ensuite chaque ensemble E_k par le plus grand cylindre tangent intérieur, on définit ainsi les différents diamètres d_k .
- c) - La position nominale des différents cylindres est définie par un modèle théorique correspondant à la position nominale des arbres théoriques. chaque diamètre nominal est égal au diamètre maxi de l'arbre augmenté du jeu fonctionnel.

On optimise alors l'ensemble des alésages en posant sur n-1 cylindres les conditions :

$$e_{ij} \geq 0$$

et sur un cylindre la condition plus grand cylindre tangent intérieur.

Ce qui s'écrit :

Pour le cylindre 1 : plus grand cylindre tangent intérieur.

$$\Delta R - z_{i1} \sin \theta_{i1} (\alpha_1 - \alpha_2) + z_{i1} \cos \theta_{i1} (\beta_1 - \beta_2) + \cos \theta_{i1} (u_1 - u_2) + \sin \theta_{i1} (v_1 - v_2) + T_{i1} = \rho_{i1} - R \text{ nominal}_1$$

pour les cylindres k avec $2 < k < n$:

$$-z_{ik} \sin \theta_{ik} (\alpha_1 - \alpha_2) + z_{ik} \cos \theta_{ik} (\beta_j - \beta_2) + \cos \theta_{jk} (u_1 - u_2) + \sin \theta_{jk} (v_1 - v_2) - (\vec{O_k O_1} \cdot \vec{x}) \sin \theta_{ik} - (\vec{O_k O_1} \cdot \vec{y}) \cdot \cos \theta_{ik} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2) + T_{ik} = \rho_{ik} - R \text{ nominal}_k$$

avec comme fonction objectif : $Z = \Delta R$ maximum.

Si l'optimisation par la méthode du simplexe donne une solution, la condition fonctionnelle d'assemblage est respectée.

b) - Avec une condition de perpendicularité au plan P, les axes $O \vec{x}$ et $O \vec{y}$ du repère sont choisis dans le plan P. La mise en équations est alors la même que précédemment avec la simplification des petites rotations et autour des axes $O \vec{x}$ et $O \vec{y}$ que l'on prend égales à zéro.

6.3.7 Conclusions :

Cette méthode générale permet de résoudre au mieux tous les cas de cotation fonctionnelle.

En effet nous avons mis en évidence une cotation géométrique du modèle nominal s'appuyant sur la détermination des écarts géométriques nécessaires et suffisants au positionnement des surfaces géométriques idéales associées par rapport au modèle géométrique nominal. La métrologie fonctionnelle permet d'optimiser les écarts géométriques suivant un ou des critères fonctionnelles d'un groupe de surfaces. Cette nouvelle approche permet de vérifier ou d'identifier directement la fonction de la pièce et, par suite, de répondre directement à la cotation fonctionnelle de la pièce.

Cette approche a été étendue au réglage des montages d'usinage [LER.86] et des machines outils. Pour cela nous avons dans un premier temps mesuré par points soit les surfaces de référence du montage d'usinage, soit les surfaces réalisées par la machine-outil, puis dans un deuxième temps nous avons optimisé l'association des surfaces géométriques idéales nominales aux surfaces mesurées en ne retenant du torseur de petits déplacements que les composantes correspondant aux possibilités de réglage du montage d'usinage ou de la machine-outil. Le critère d'optimisation choisi peut être comme précédemment aussi bien celui du défaut de forme mini, de Gauss, de la surface tangente que celui d'une cotation fonctionnelle de la pièce. On fait donc coïncider au mieux le réglage de la machine-outil ou du montage usinage à la fonctionnalité de la pièce, ce qui a pour conséquence de maximiser les tolérances de réglage.

CHAPITRE VII

VII - CORRECTION DES ECARTS GEOMETRIQUES D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE.

Les algorithmes d'identification des pièces mécaniques sont liés à un repère théoriquement orthonormé, la qualité des résultats est donc directement liée à la connaissance de la géométrie réelle du repère de mesure.

Dans le cas des mesures traditionnelles faites au marbre, le métrologue maîtrise bien la qualité de ses mesures. En effet, les distances sont toutes mesurées suivant une seule direction perpendiculaire au marbre et en référence à un empilage de cales étalons. Il n'en est pas de même dans le cas de mesures tridimensionnelles où le métrologue n'a plus cette notion intuitive de la qualité des distances mesurées. Il doit en conséquence effectuer ses mesures en faisant confiance à la machine à mesurer et par suite en vérifier périodiquement la qualité géométrique.

Ce nouveau problème du contrôle qualité ou de l'identification géométrique des machines à mesurer tridimensionnelle peut être abordé suivant deux approches complémentaires. Une première approche est basée sur une méthode globale d'évaluation de la machine ; pour cela on contrôle des étalons matérialisés avec l'ensemble des moyens de mesure de la machine, c'est-à-dire la mécanique, le palpeur, l'électronique, et les logiciels. La précision des résultats de mesure donne une bonne indication sur la classe de précision de la machine. Les étalons utilisés varient d'une méthode à l'autre, on peut recenser la barre à boules magnétiques [KUN.83], le test de circularité [KNA.83] et le dispositif T.D.S. du Laboratoire National d'Essais [SCH.86] composé de 20 étalons disposés sur un marbre orientable.

Cette méthode globale permet également de donner des indications sur l'origine et le sens de quelques défauts locaux de la machine c'est-à-dire les justesses des trois dispositifs de mesure et les défauts d'orthogonalité des trois axes de mesure. Cette première approche est bien adaptée au contrôle qualité d'une machine à mesurer. En effet cette méthode est rapide, ne nécessite pas de moyen de mesure externe à la machine, et peut être mise en oeuvre par l'utilisateur, elle met en évidence d'éventuelles erreurs géométriques de la machine mais ne permet pas de les identifier avec suffisamment de précisions pour effectuer ensuite une correction géométrique de la machine.

Une deuxième approche consiste à évaluer par mesure les différents paramètres métrologiques élémentaires et indépendants caractérisant la géométrie de la machine à mesurer [ZHA.85] et [FER.86]. Cette méthode longue à mettre en oeuvre nécessite des moyens de mesure externes à la machine ainsi que des modèles mathématiques d'identification des erreurs systématiques de mesure dans le volume. L'analyse des sources d'erreurs permet ensuite de corriger les écarts géométriques soit mécaniquement, soit par logiciel, cette méthode intéresse donc les fabricants et les services de maintenance des matériels de mesure. Nous nous proposons d'étudier cette deuxième approche en utilisant le modèle général d'identification d'une surface fabriquée définie au chapitre 3.

Une troisième approche consiste à modéliser globalement le volume de la machine par un modèle mathématique basé sur les coordonnées curviligne [CLE.81] ou le tenseur métrique [JOU.86] l'identification du modèle se fait par mesure directe d'éléments géométriques matérialisés.

7.1 Modèle d'identification géométrique d'une machine à mesurer tridimensionnelle.

Une machine à mesurer est le plus souvent constituée de 4 solides liés cinématiquement entre-eux par trois liaisons prismatiques d'axe ox , oy , oz montés en série. Un palpeur de centre de sphère de palpation P lié à l'un des solides extrêmes permet d'enregistrer les coordonnées x y z lues sur 3 capteurs de position placés parallèlement aux directions principales des trois prismatiques. La technologie utilisée dans la conception des machines à mesurer permet d'obtenir une grande raideur dans les liaisons et par suite de faire l'hypothèse que les comportements géométriques des différentes liaisons sont indépendants et sans hystérésis.

Les repères attachés aux différents solides sont choisis d'axes parallèles aux directions générales des trois prismatiques.

L'origine de chaque repère est prise sur une position particulière du curseur de lecture de chaque règle de mesure, ainsi nous avons :

- L'origine O attachée au marbre (S_0) correspondant à la position zéro du curseur de la règle de mesure X_L .
- les origines O_1 du chariot longitudinal (S_1) et O_2 du chariot vertical (S_2) sont confondues avec le curseur de lecture des deux règles X_L et Y_L .
- l'origine O_3 du chariot transversal (S_3) est confondue avec la position zéro du curseur de lecture de la règle Z_L .

Si X_L , Y_L et Z_L sont les coordonnées lues par les trois capteurs de position on a :

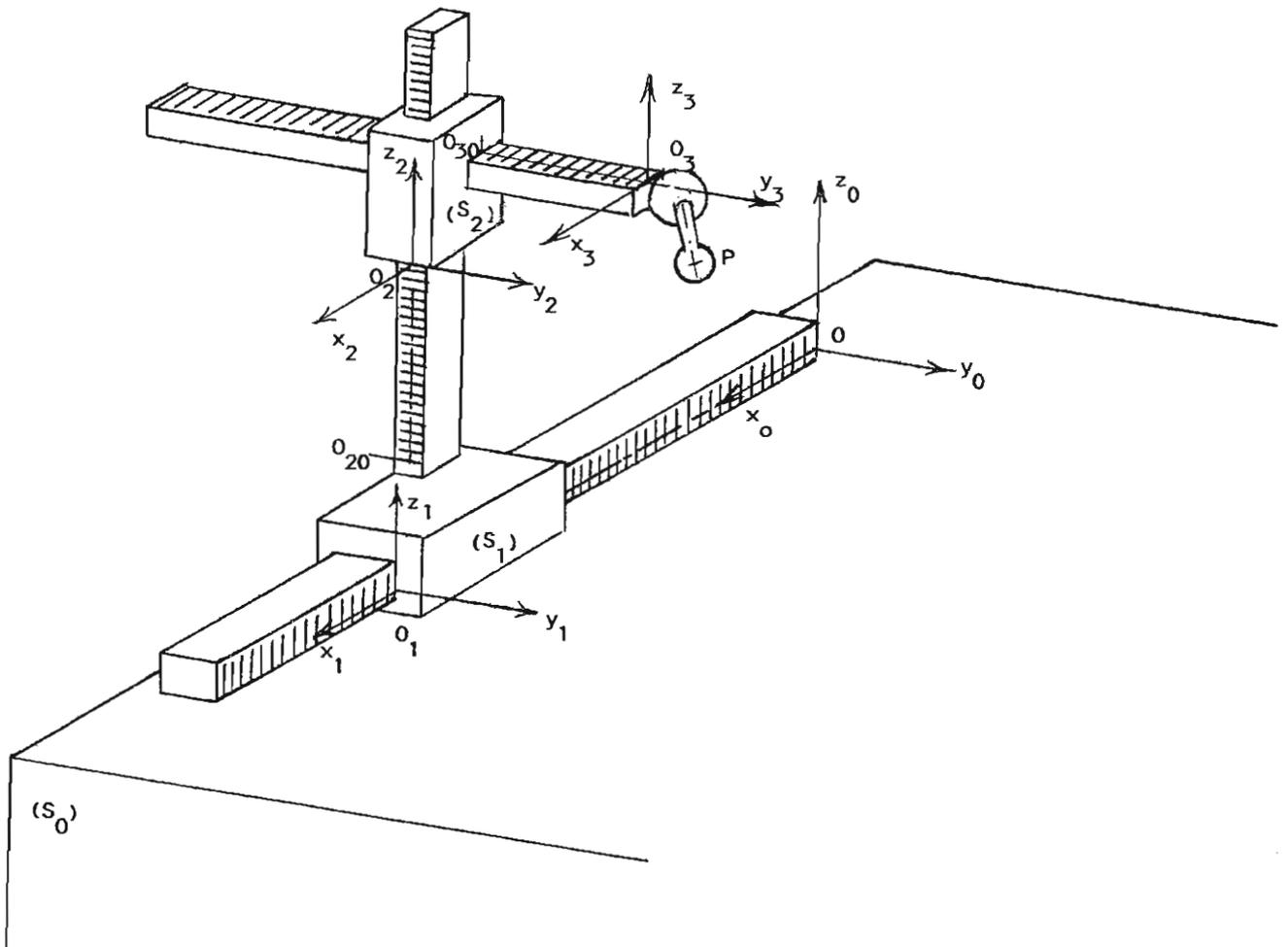
$$\vec{O_0O_1} = X_L \vec{x}_0$$

$$\vec{O_1O_2} = a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1 + (c_1 + Z_L) \vec{z}_1$$

$$\vec{O_2O_3} = a_2 \vec{x}_2 + (b_2 + Y_L) \vec{y}_2 + c_2 \vec{z}_2$$

et $\vec{O_3P} = a_3 \vec{x}_3 + b_3 \vec{y}_3 + c_3 \vec{z}_3$

où les constantes a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 sont liées à la morphologie de la machine et les constantes a_3 , b_3 et c_3 à celle du palpeur de mesure de centre P.



Les écarts systématiques entre les valeurs lues par les capteurs de mesure des déplacements et les coordonnées réelles du centre de la sphère de palpation sont dus essentiellement :

- aux défauts géométriques des liaisons prismatiques entre solides.
- aux déformations des différents solides.
- aux allongements dus aux variations de température.
- à la technologie du palpeur électronique utilisée.

7.1.1 Ecart systématique dû aux défauts géométriques des liaisons prismatiques .

Le défaut géométrique systématique de chaque liaison prismatique entre deux solides S_j et S_{j-1} peut être caractérisé par un torseur de petits déplacements exprimant les 5 écarts géométriques de la liaison (3 rotations et 2 translations).

Ainsi nous avons, pour chaque liaison prismatique, les torseurs exprimés aux différentes origines O_1, O_2, O_3 .

$$\text{Liaison } S_1/S_0 \quad \{\tilde{\tau}_{1/0}\}_{O_1} \quad \begin{cases} \alpha_1 [X_L] & 0 \\ \beta_1 [X_L] & v_1 [X_L] \\ \gamma_1 [X_L] & w_1 [X_L] \end{cases}$$

$$\text{Liaison } S_2/S_1 \quad \{\tilde{\tau}_{2/1}\}_{O_2} \quad \begin{cases} \alpha_2 [z_L] & u_2 [z_L] \\ \beta_2 [z_L] & v_2 [z_L] \\ \gamma_2 [z_L] & 0 \end{cases}$$

$$\text{Liaison } S_3/S_2 \quad \{\tilde{\tau}_{3/1}\}_{O_2} \quad \begin{cases} \alpha_3 [Y_L] & u_3 [Y_L] \\ \beta_3 [Y_L] & 0 \\ \gamma_3 [Y_L] & w_3 [Y_L] \end{cases} .$$

L'écart systématique de mesure résultant de la chaîne cinématique des différents solides peut être lui aussi caractérisé par un torseur exprimant le petit déplacement entre le solide porte palpeur (S_3) et le marbre porte pièce (S_0). Ainsi on aura la relation cinématique entre les torseurs [CLE.72]

$$\tau_{3/0} = \tau_{3/2} + \tau_{2/1} + \tau_{1/0}$$

que l'on peut exprimer au point P.

$$\text{Soit } \{\tau_{3/0}\}_P \begin{cases} \vec{R}_{3/0} \\ \vec{D}_{3/0} \end{cases}$$

Ecart dû à la petite rotation : $\vec{R}_{3/0}$

$$\vec{R}_{3/0} \cdot \vec{x}_0 = \alpha_1 [x_L] + \alpha_2 [z_L] + \alpha_3 [y_L]$$

$$\vec{R}_{3/0} \cdot \vec{y}_0 = \beta_1 [x_L] + \beta_2 [z_L] + \beta_3 [y_L]$$

$$\vec{R}_{3/0} \cdot \vec{z}_0 = \gamma_1 [x_L] + \gamma_2 [z_L] + \gamma_3 [y_L]$$

Ecart dû au petit déplacement $\vec{D}_{3/0}$ exprimé au point P :

$$\vec{D}_{3/0} \cdot \vec{x}_0 = u_3 [y_L] - b_3 \cdot \gamma_3 [y_L] + c_3 \cdot \beta_3 [y_L] + u_2 [z_L] - (b_2 + b_3 + y_L) \cdot \gamma_2 [z_L] + (c_2 + c_3) \cdot \beta_2 [z_L] - \\ (b_1 + b_2 + b_3 + y_L) \cdot \gamma_1 [x_L] + (c_1 + c_2 + c_3 + z_L) \cdot \beta_1 [x_L]$$

$$\vec{D}_{3/0} \cdot \vec{y}_0 = -c_3 \cdot \alpha_3 [y_L] + a_3 \cdot \gamma_3 [y_L] + v_2 [z_L] - (c_2 + c_3) \cdot \alpha_2 [z_L] + (a_2 + a_3) \cdot \gamma_2 [z_L] + v_1 [x_L] - \\ (c_1 + c_2 + c_3 + z_L) \cdot \alpha_1 [x_L] + (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \gamma_1 [x_L]$$

$$\vec{D}_{3/0} \cdot \vec{z}_0 = w_3 [y_L] - a_3 \cdot \beta_3 [y_L] + b_3 \cdot \alpha_3 [y_L] - (a_2 + a_3) \cdot \beta_2 [z_L] + (b_2 + b_3 + y_L) \cdot \alpha_2 [z_L] + w_1 [x_L] - \\ (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \beta_1 [x_L] + (b_1 + b_2 + b_3 + y_L) \cdot \alpha_1 [x_L]$$

7.1.2 Ecart de justesse des règles de mesures :

Les écarts de justesse $\xi_x [x_L]$, $\xi_y [y_L]$, $\xi_z [z_L]$ sont portés par les axes orthonormés $O\vec{x}_0$, $O_3\vec{y}_3$ et $O_2\vec{z}_2$, le défaut d'orthogonalité entre les 3 règles est suffisamment petit pour considérer que les écarts ξ_x , ξ_y et ξ_z sont également les écarts de justesse des trois règles de mesure.

7.1.3 Ecart systématique dûs aux déformations des différents solides :

La variation des positions relatives des solides ainsi que les variations de température $[\Delta T]$ engendrent des déformations élastiques et l'allongement des différents solides. Les écarts ainsi créés peuvent être modélisés par des lois de déformation et d'allongement que l'on notera :

$$\xi_{00_1}^j [\Delta T], \quad \xi_{0_1 0_2}^j [x_L, y_L, z_L, \Delta T], \quad \xi_{0_2 0_3}^j [x_L, y_L, z_L, \Delta T]$$

avec $j = \{x, y, z\}$.

7.1.4 Ecart systématique dûs à la technologie du palpeur électronique

Les écarts systématiques dûs au palpeur ne sont plus liés aux coordonnées x_L , y_L , z_L de la machine mais à la direction d'accostage du palpeur sur la pièce, aussi préfère-t-on actuellement procéder à un étalonnage systématique de la position (a_3, b_3, c_3) du palpeur et du diamètre de la sphère de palpation et par suite négliger les écarts systématiques devant les autres défauts.

7.1.5 Expression générale des coordonnées corrigées

Les coordonnées corrigées x_p, y_p, z_p du point P centre du palpeur, exprimées dans un repère orthonormé $\{O, \vec{x}_O, \vec{y}_O, \vec{z}_O\}$ sont les sommes de la position nominale du point P théorique et des écarts systématiques dûs à la justesse ξ des règles, à la déformation δ des solides sous une charge Q et à la chaîne cinématique des solides.

Soit les coordonnées :

$$\begin{aligned}
 x_p &= x_L + a_1 + a_2 + a_3 + \xi_x [X_L] + \xi_{00_1}^x [\Delta T] + \delta_{0_1 0_2}^x [Y_L, Z_L, \Delta T, Q] + \delta_{0_2 0_3}^x [Y_L, \Delta T, Q] + u_3 [Y_L] - \\
 & b_3 \gamma_3 [Y_L] + c_3 \beta_3 [Y_L] + u_2 [Z_L] - (b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \gamma_2 [Z_L] + (c_2 + c_3) \cdot \beta_2 [Z_L] - \\
 & (b_1 + b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \gamma_1 [X_L] + (c_1 + c_2 + c_3 + Z_L) \cdot \beta_1 [X_L] \\
 y_p &= Y_L + b_1 + b_2 + b_3 + \xi_y [Y_L] + \delta_{0_1 0_2}^y [Y_L, Z_L, \Delta T, Q] + \delta_{0_2 0_3}^y [Y_L, \Delta T, Q] - c_3 \cdot \alpha_3 [Y_L] + \\
 & a_3 \cdot \gamma_3 [Y_L] + v_2 [Z_L] - (c_2 + c_3) \cdot \alpha_2 [Z_L] + (a_2 + a_3) \cdot \gamma_2 [Z_L] + v_1 [X_L] - \\
 & (c_1 + c_2 + c_3 + Z_L) \cdot \alpha_1 [X_L] + (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \gamma_1 [X_L] \\
 z_p &= Z_L + c_1 + c_2 + c_3 + \xi_z [Z_L] + \delta_{0_1 0_2}^z [Y_L, Z_L, \Delta T, Q] + \delta_{0_2 0_3}^z [Y_L, \Delta T, Q] + w_3 [Y_L] - a_3 \cdot \beta_3 [Y_L] \\
 & + b_3 \cdot \alpha_3 [Y_L] - (a_2 + a_3) \cdot \beta_2 [Z_L] + (b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \alpha_2 [Z_L] + w_1 [X_L] - (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \beta_1 [X_L] + \\
 & (b_1 + b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \alpha_1 [X_L] .
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que pour tout point de mesure (X_L, Y_L, Z_L) et dans un repère orthogonal, les 3 défauts d'orthogonalités des axes étant choisis nuls, la connaissance de 15 écarts géométriques des trois liaisons prismatiques, des 3 écarts de justesse des règles de mesure, des 7 fonctions de déformation élastique et d'allongement des solides permet de corriger les défauts systématiques d'une machine à mesurer considérée comme un assemblage rigide de solides déformables.

7.2 Détermination expérimentale des écarts géométriques systématiques :

L'expérimentation a été faite sur une machine à mesurer manuelle type Trusquin de la société M.F.O. de courses 1500 X 790 X 1000. Les guidages sont réalisés par des roulements légèrement précontraints, la dimension des guidages et l'expérimentation nous a amenés à effectuer les mesures tous les 50 mm suivant les axes x ,y et tous les 25 mm suivant l'axe z. Les solides constituant la machine étant déformables nous avons, dans un premier temps, mis en évidence leurs lois de déformation avant d'effectuer, dans un deuxième temps, l'identification des 21 écarts géométriques systématiques en tenant compte des déformations introduites par les masses des appareils de mesure.

7.2.1 Déformation des solides constituant la machine à mesurer.

La masse des deux appareils de mesure utilisés étant de 1411 g et de 3115 g et celui du palpeur électronique de 233 g, nous avons établi point par point la carte de déformation du point O_3 sous une charge variant de 0 à 1500 grammes.

L'expérimentation a montré que les déformations du marbre et de la colonne verticale sont négligeables (inférieures au micron) par contre la déformation du bras horizontal est importante (90 microns pour une masse de 1500 g et une sortie du bras de 540 mm).

Les déformations se traduisent par un petit déplacement $\delta_{w3} [Y_L, Q]$ dû à la flèche du bras et une petite rotation $\delta_{\alpha 3} [Y_L, Q]$ de l'angle α_3 .

Le tableau 0 donne les résultats expérimentaux. Le bras est constitué d'une poutre creuse précontrainte par tirants réglables, celle-ci est difficilement modélisable par une loi simple de résistance des matériaux, aussi nous avons préféré conserver un maximum de précisions en utilisant directement les valeurs expérimentales mesurées.

Les coordonnées corrigées X_P , Y_P , Z_P ont pour expression :

$$(1) \quad X_P = X_L + a_1 + a_2 + a_3 + \epsilon_x [X_L] + u_3 [Y_L] - b_3 \cdot \gamma_3 [Y_L] + c_3 \cdot \beta_3 [Y_L] + u_2 [Z_L] - (b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \gamma_2 [Z_L] \\ + (c_2 + c_3) \cdot \beta_2 [Z_L] - (b_1 + b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \gamma_1 [X_L] + (c_1 + c_2 + c_3 + Z_L) \cdot \beta_1 [X_L]$$

$$(2) \quad Y_P = Y_L + b_1 + b_2 + b_3 + \epsilon_y [Y_L] - c_3 \cdot (\alpha_3 [Y_L] - \alpha_3 [Y_L, Q]) + a_3 \cdot \gamma_3 [Y_L] + v_2 [Z_L] - (c_2 + c_3) \cdot \alpha_2 [Z_L] \\ + (a_2 + a_3) \cdot \gamma_2 [Z_L] + v_1 [X_L] - (c_1 + c_2 + c_3 + Z_L) \cdot \alpha_1 [X_L] + (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \gamma_1 [X_L]$$

$$(3) \quad Z_P = Z_L + c_1 + c_2 + c_3 + \epsilon_z [Z_L] + w_3 [Y_L] + \delta w_3 [Y_L, Q] - a_3 \beta_3 [Y_L] + b_3 \cdot (\alpha_3 [Y_L] - \delta_{\alpha_3} [Y_L, Q]) - \\ (a_2 + a_3) \cdot \beta_2 [Z_L] + (b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \alpha_2 [Z_L] + w_1 [X_L] - (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \beta_1 [X_L] + (b_1 + b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \alpha_1 [X_L]$$

avec

ϵ_i ; $i = \{x, y, z\}$ défauts de justesse

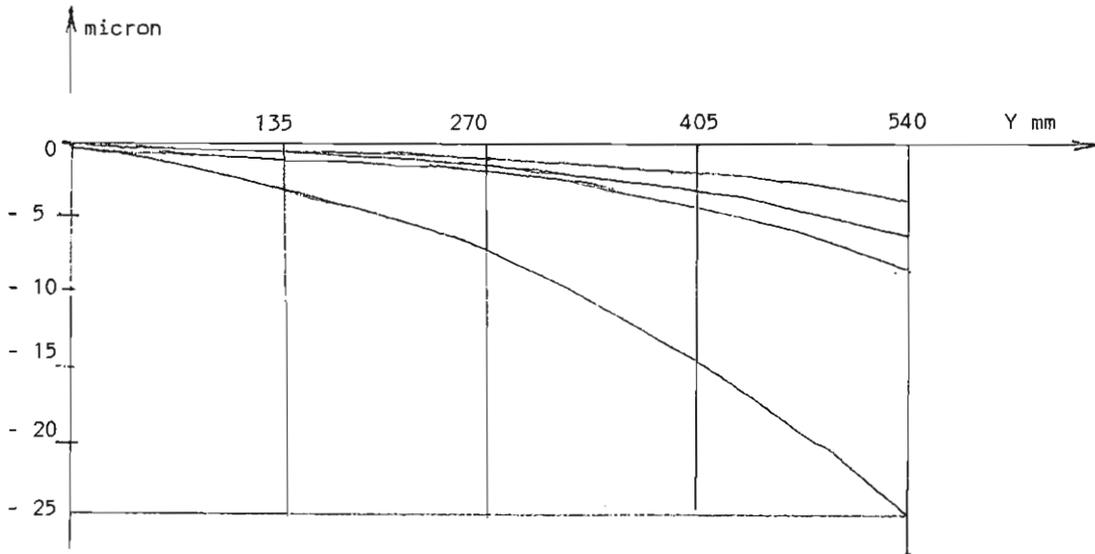
α_j β_j γ_j ; $j = \{1, 2, 3\}$ défauts de rectitude des 3 liaisons

u_j v_j w_j ; $j = \{1, 2, 3\}$ défauts de rectitude des 3 liaisons

δ_k ; $k = \{\alpha_3, w_3\}$ déformation du solide (S_3)

Masse g	Sortie du bras Y=							
	135 mm		270 mm		405 mm		540mm	
	δ_{w3} micron	$\delta_{\alpha3}$ $\mu/100mm$	δ_{w3} micron	$\delta_{\alpha3}$ $\mu/100mm$	δ_{w3} micron	$\delta_{\alpha3}$ $\mu/100mm$	δ_{w3} micron	$\delta_{\alpha3}$ $\mu/100mm$
360	0,58	0,28	1,18	0,5	2,2	0,7	4	1
410	0,8	0,3	1,6	0,6	3,4	1	5,8	1,2
510	1	0,4	2	0,7	4,2	1,2	7,2	1,6
1580	3,4	1,4	6,6	2,3	14	4	24	6

Mesure du petit déplacement de déformation : δ_{w3}



Mesure de la petite rotation de déformation : $\delta_{\alpha3}$

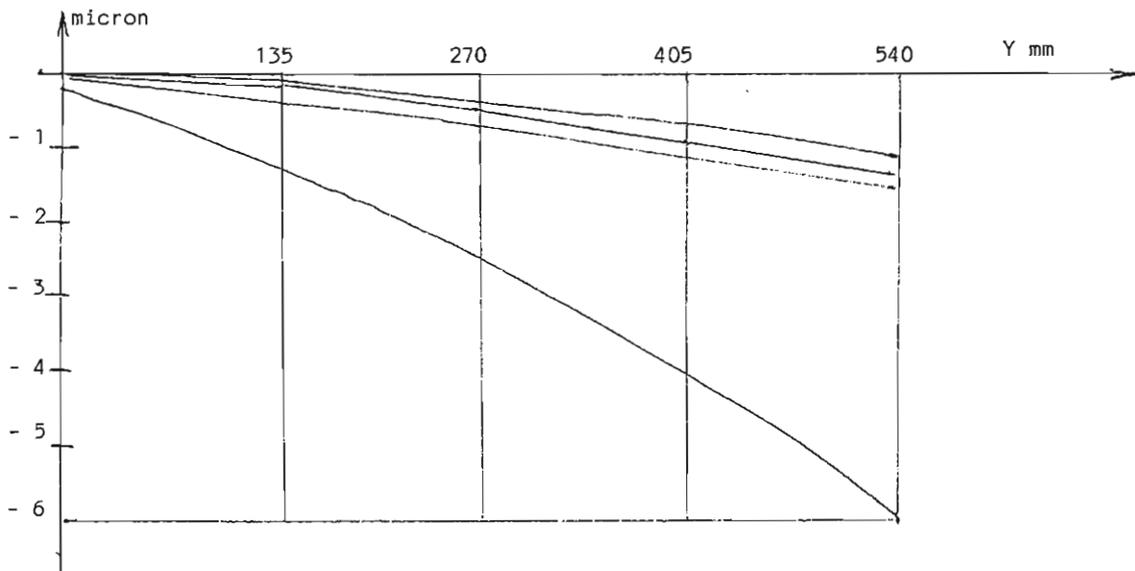


TABLEAU 0 : Déformation du bras d'axe Y

7.2.2 Mesure des écarts systématiques dûs aux liaisons entre les solides :

Afin de ne prendre en compte que les sources d'erreurs dues à la géométrie de la machine, les mesures ont été effectuées avec un appareillage de métrologie extérieur à la machine, celui-ci nous a permis trois types de mesures :

- des mesures d'angles par niveaux électroniques différentiels ou interférométrie laser HP.

- des mesures de justesse par interférométrie laser,

- des mesures de rectitude par interférométrie laser ou par mesure d'une règle de référence en marbre avec un comparateur électronique.

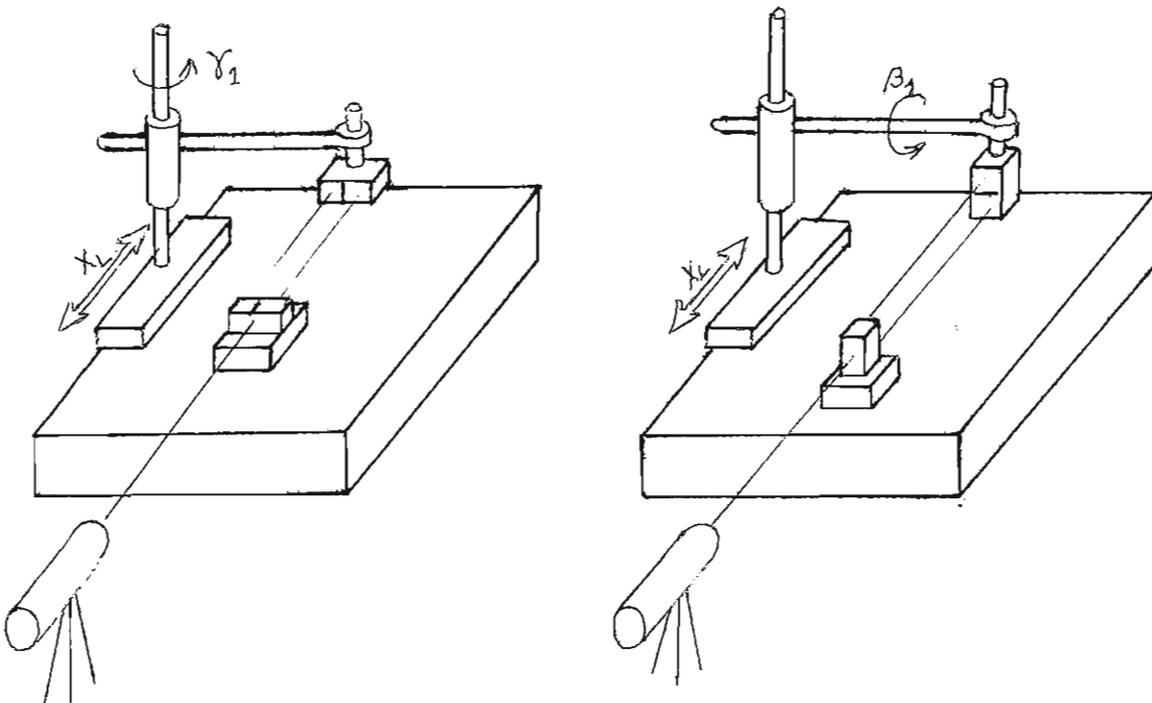
Lorsque la mesure des angles était possible celle-ci a donné directement les écarts angulaires cherchés, par contre la mesure des justesses et des rectitudes n'a permis qu'une mesure indirecte des écarts géométriques restants.

7.2.3 Etude détaillée de la mesure des 5 écarts géométriques de la liaison prismatique d'axe x_0 entre les solides (S_0) et (S_1) .

Les mesures ont été effectuées au pas de $50 \text{ mm} \pm 0,005$ sur le compteur X_L .

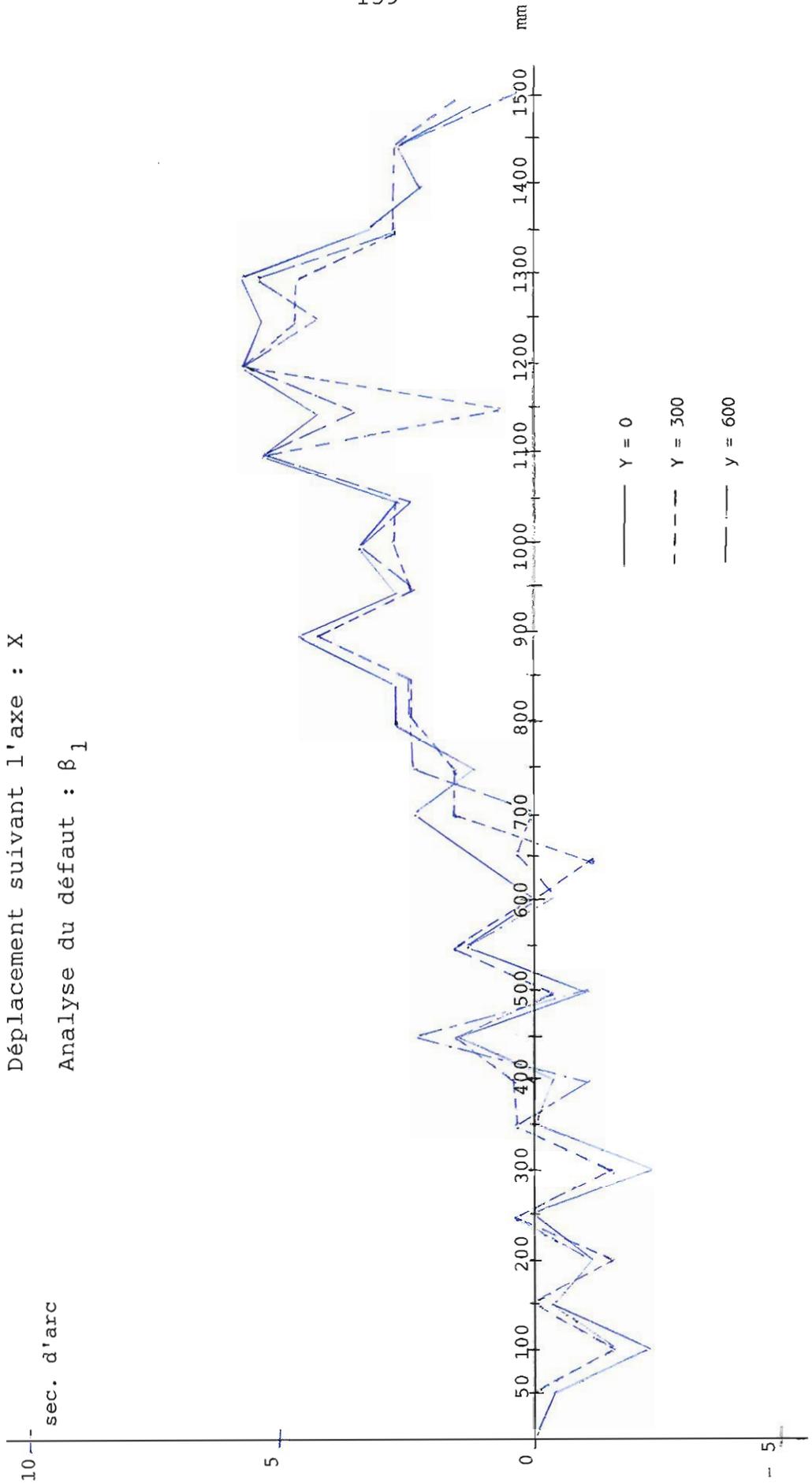
7.2.3.1 Les deux écarts angulaires $\beta_1 [X_L]$ et $\gamma_1 [X_L]$ sont mesurés directement par interférométrie laser, par convention les angles seront tous choisis nuls à l'origine $X_L = 0$.

Trois séries de mesure de chacun des deux angles ont été effectuées pour $Y_L = 0$; $Y_L = 750$; et $Y_L = 1500$ mm.



Les résultats sont donnés sur les graphes 1 et 2. Sachant que 5 secondes d'arc provoque un défaut de 25μ à un mètre, les écarts β_1 et γ_1 ne sont pas négligeables. La faible dispersion obtenue sur les trois mesures (inférieure à $\pm 3\mu$ sur un mètre) vérifie l'hypothèse de liaison rigide et permet de les caractériser par la moyenne des 3 écarts mesurés.

Défaut de Rotation autour de l'axe: Y
Déplacement suivant l'axe : X
Analyse du défaut : β_1

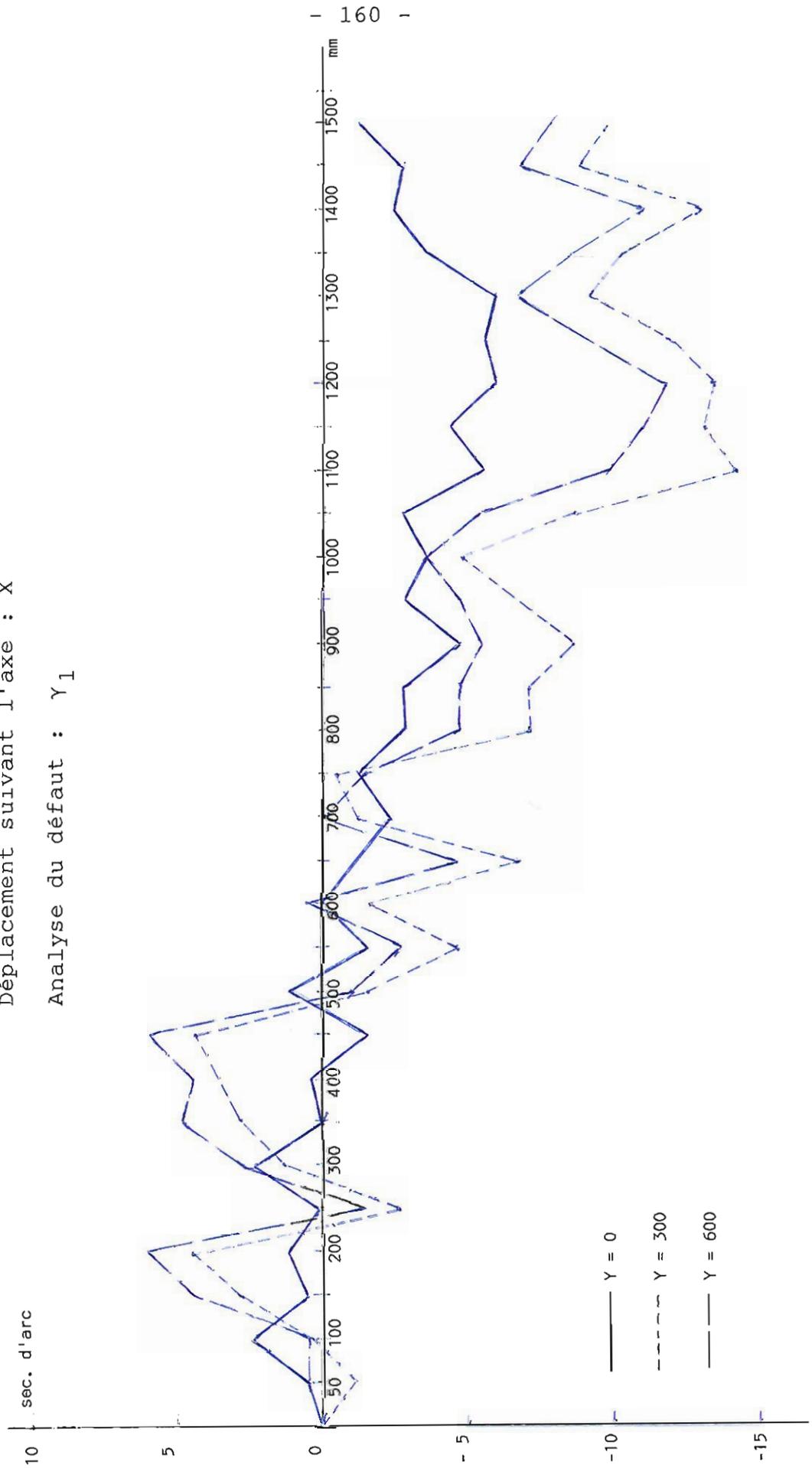


GRAPHE : 1 écart angulaire β_1

Défaut de rotation autour de l'axe: Z

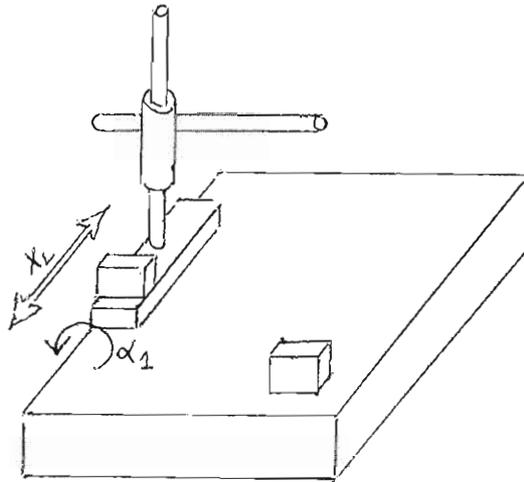
Déplacement suivant l'axe : X

Analyse du défaut : γ_1



GRAPHE : 2 écart angulaire γ_1

7.2.3.2 L'écart angulaire α_1 a été obtenu par mesure différentielle de deux niveaux électroniques placés l'un sur le marbre, l'autre sur le solide (S_1).

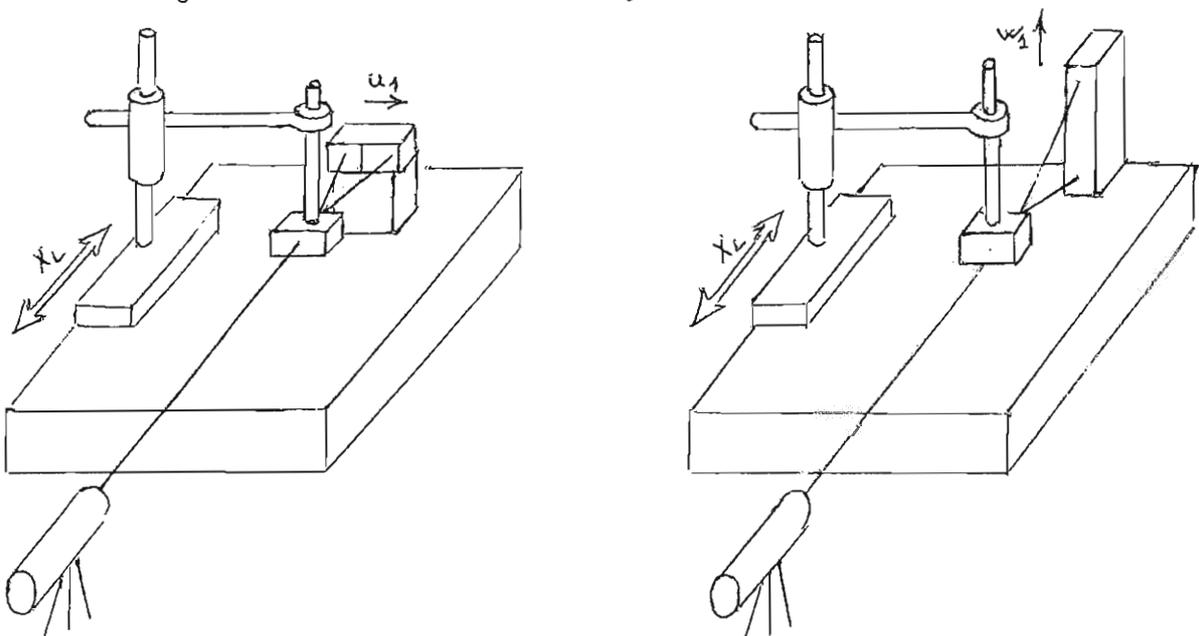


Les résultats sont donnés sur le graphe 3. On vérifie que l'angle α_1 est indépendant des positions des solides (S_2) et (S_3).

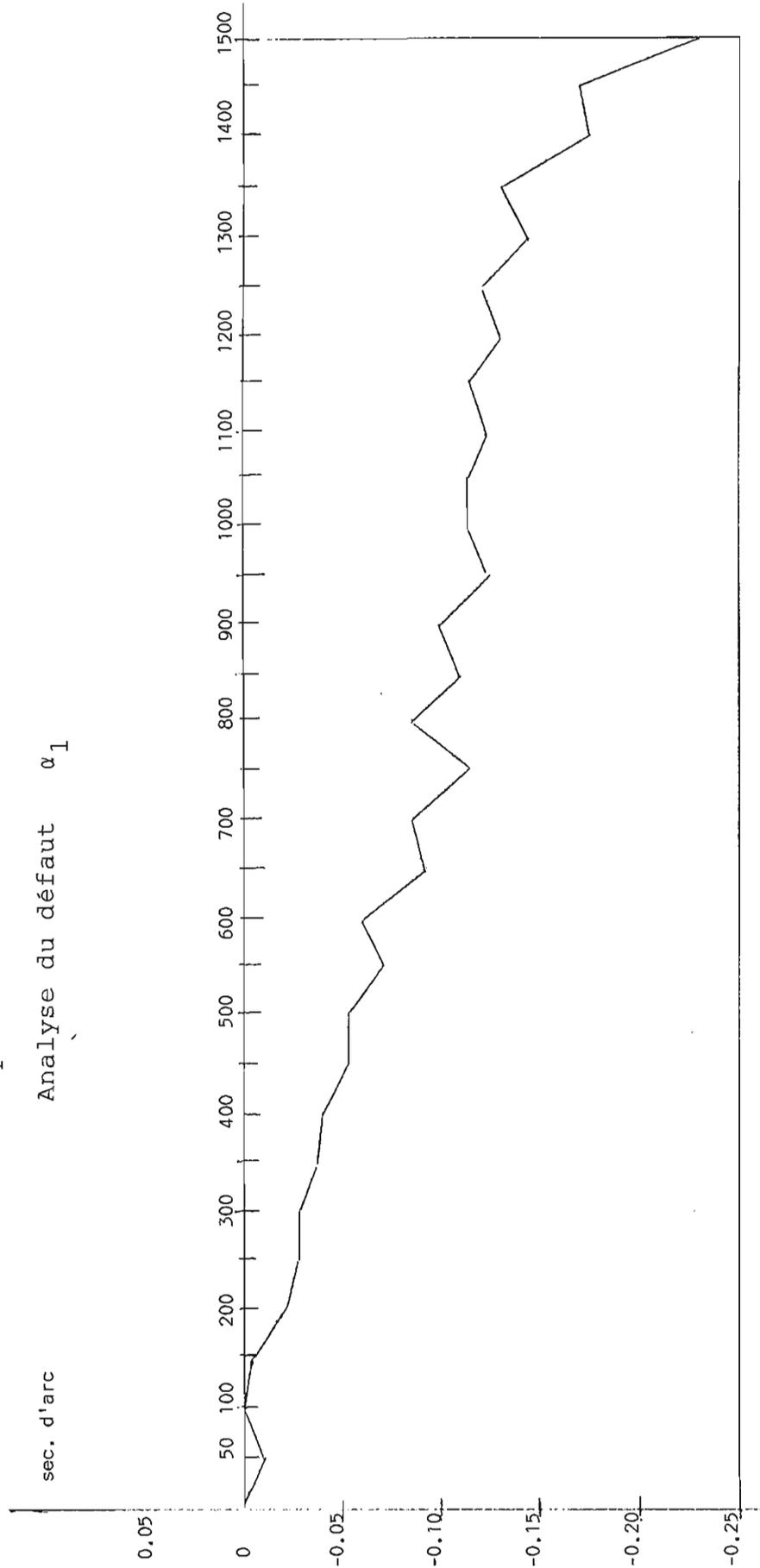
Les faibles valeurs des écarts trouvées (inférieures à $1 \mu/m$) permettent de négliger l'écart α_1 .

7.2.3.3 La détermination des rectitudes v_1 et w_1 a été déduite des écarts mesurés par rapport à une droite de référence de direction parallèle à l'axe de déplacement du solide (S_1) par rapport au marbre (S_0).

La direction des écarts mesurés a été faite suivant l'axe y_0 , puis suivant l'axe z_0 .



Défaut de rotation autour de l'axe X
Déplacement suivant l'axe X
Analyse du défaut α_1



GRAPHE : 3 écart angulaire α_1

Chaque mesure a été effectuée pour $Z_L = 0$ et répétée pour 3 valeurs de Y_L ; 0 ; 300 et 600 mm. Les droites de référence ne sont pas parallèles. Les graphes 4 et 5 donnent les résultats.

Interprétation des résultats :

D'après les équations générales (2) et (3) et compte tenu que les mesures sont faites pour différentes valeurs de X_L , les écarts mesurés e_{1yi} et e_{1zi} en référence à une droite d'indice i répondent aux équations :

$$e_{1yi} = v_{1i} [X_L] - (c_1 + c_2 + c_3 + Z_L) \cdot \alpha_1 [X_L] + (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \gamma_1 [X_L]$$

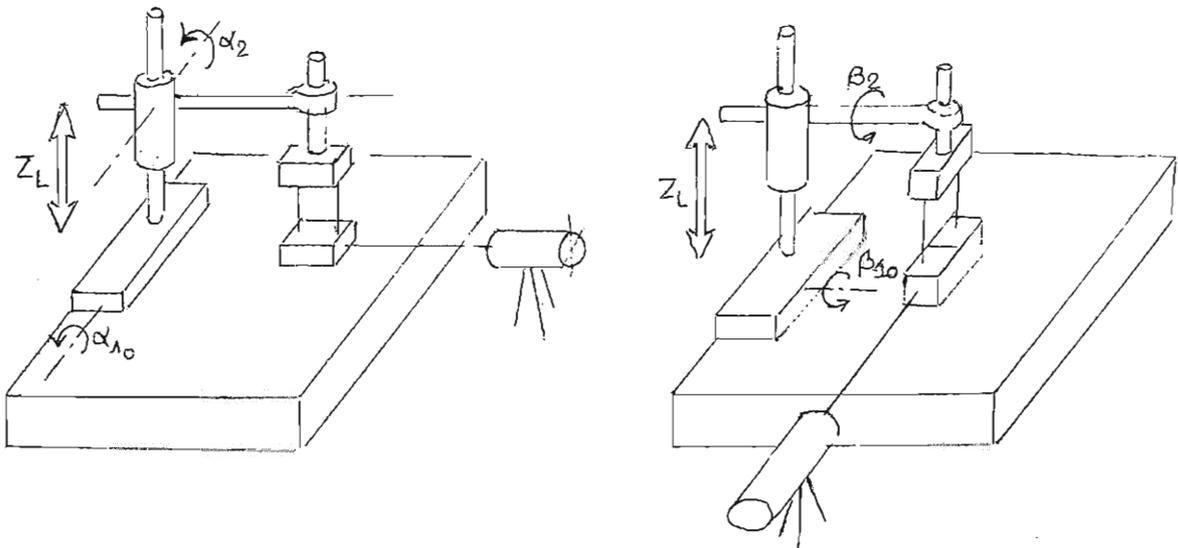
$$e_{1zi} = w_{1i} [X_L] - (a_1 + a_2 + a_3) \beta_1 [X_L] + (b_1 + b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \alpha_1 [X_L]$$

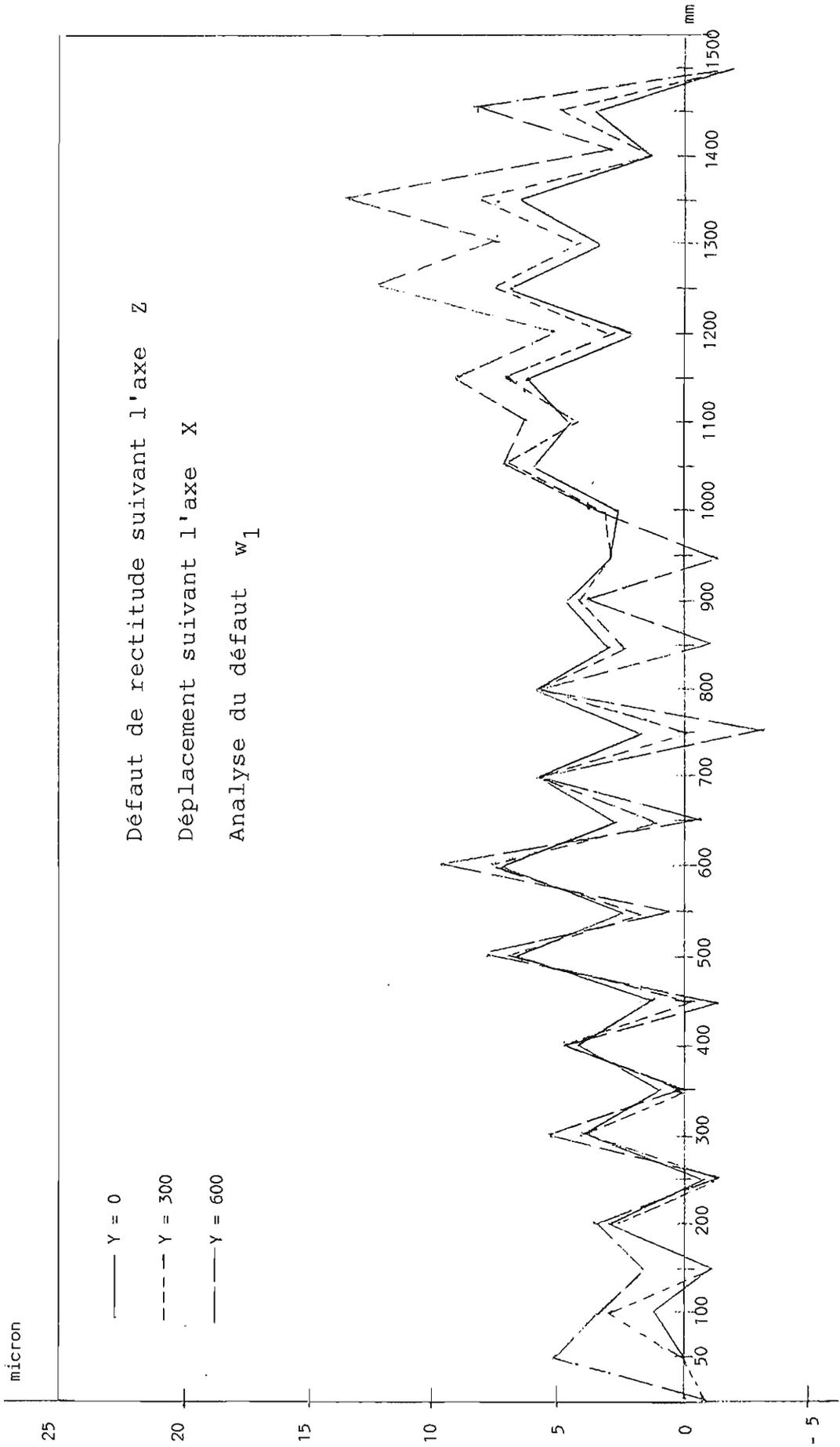
connaissant α_1 , β_1 , γ_1 on en déduit les écarts $v_{1(i)}$ et $w_{1(i)}$

La concordance des résultats entre les mêmes écarts calculés pour trois valeurs différentes de Z : 0, 300, 600 est réalisée par un calage des droites de références entre-elles. On remarque une très faible dispersion sur les résultats.

7.2.4 Mesure des 5 écarts géométriques de la liaison prismatique d'axe z_2 entre les solides (S_1) et (S_2).

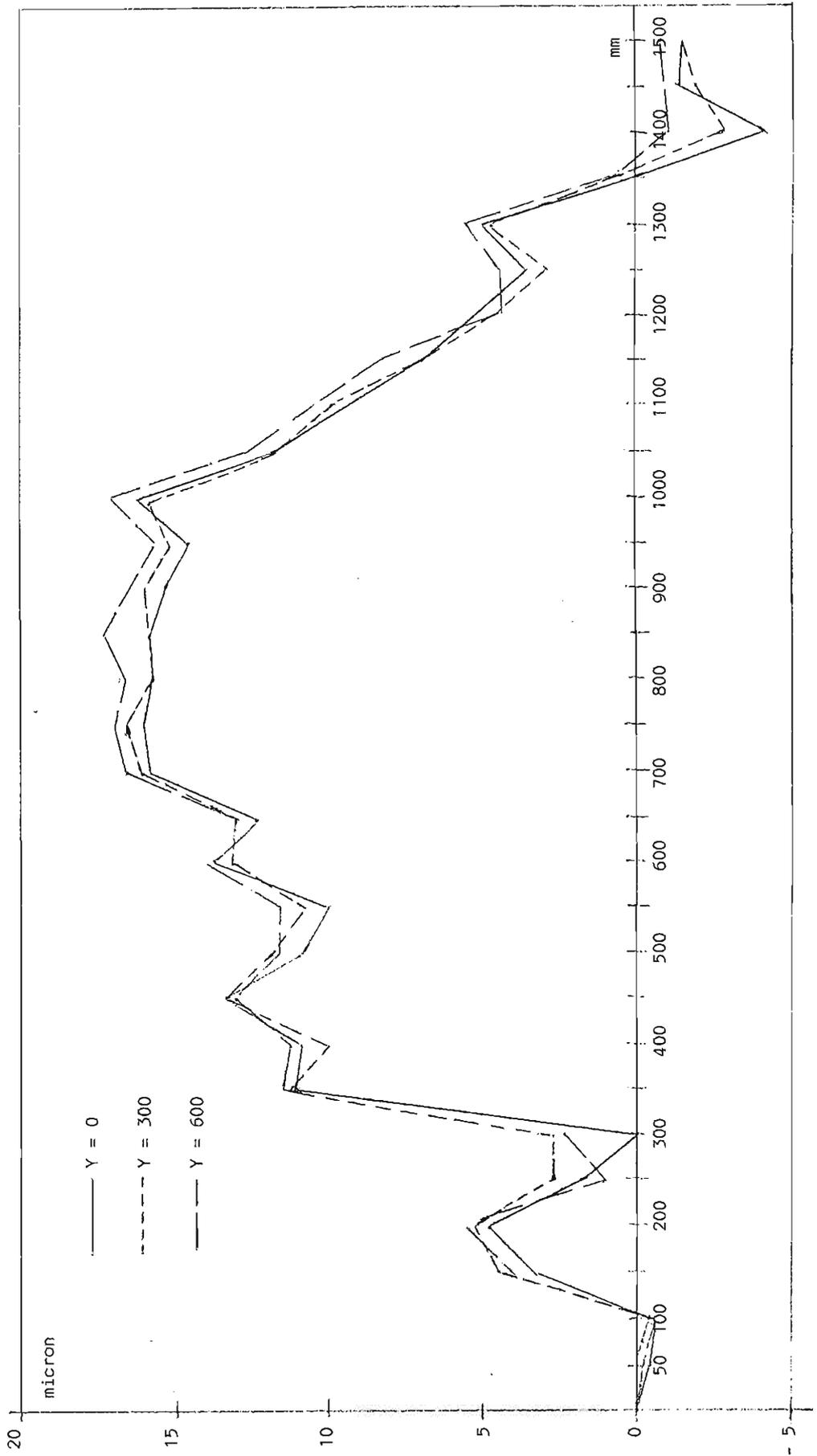
7.2.4.1 Les écarts angulaires $\alpha_2 [Z_L]$ et $\beta_2 [Z_L]$ sont mesurés par interférométrie laser.





graphe : 4 écart de rectitude w_1

Défaut de rectitude de direction Y
Déplacement suivant l'axe X
Analyse du défaut v_1



GRAPHE : 5 écart de rectitude v_1

Les angles α_2 et β_2 cherchés représentent les écarts angulaires entre le solide (S_1) et le solide (S_2), par convention leurs origines sont prises pour $z_L = 0$.

La mesure par interférométrie laser donne les écarts angulaires α_2^* et β_2^* entre le solide (S_3) et le solide (S_0) soit

$$\alpha_2^* = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{et} \quad \beta^* = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

En effectuant les mesures avec le paramètre $Y_L=0$ correspondant par convention à l'origine nulle des angles α_3 et β_3 ($\alpha_3 = 0$; $\beta_3 = 0$) et en imposant comme origine des angles α_2^* et β_2^* les valeurs suivantes :

$$\alpha_2^* [z_L=0] = - \alpha_1 [X_L]$$

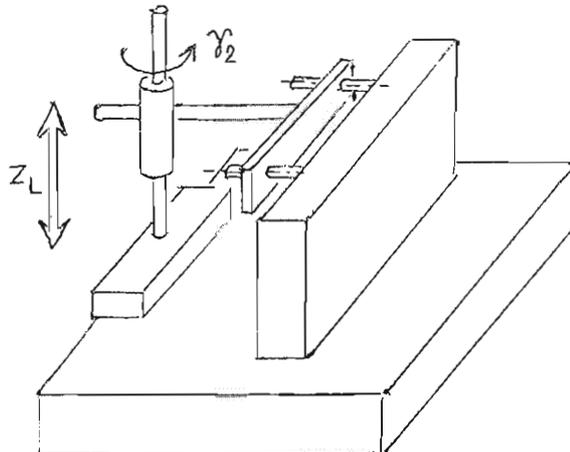
$$\beta_2^* [z_L=0] = - \beta_1 [X_L] \quad \text{avec } X_L = \text{cte}$$

On mesure directement les écarts angulaires cherchés

$$\alpha_2 [z_L] = \alpha_2^* [z_L]$$

$$\beta_2 [z_L] = \beta_2^* [z_L]$$

7.2.4.2 La mesure de l'écart angulaire $\gamma_2 [z_L]$ n'est pas réalisable par des moyens conventionnels. Une solution [ZHA.85] est possible par mesure différentielle d'un plan de référence :



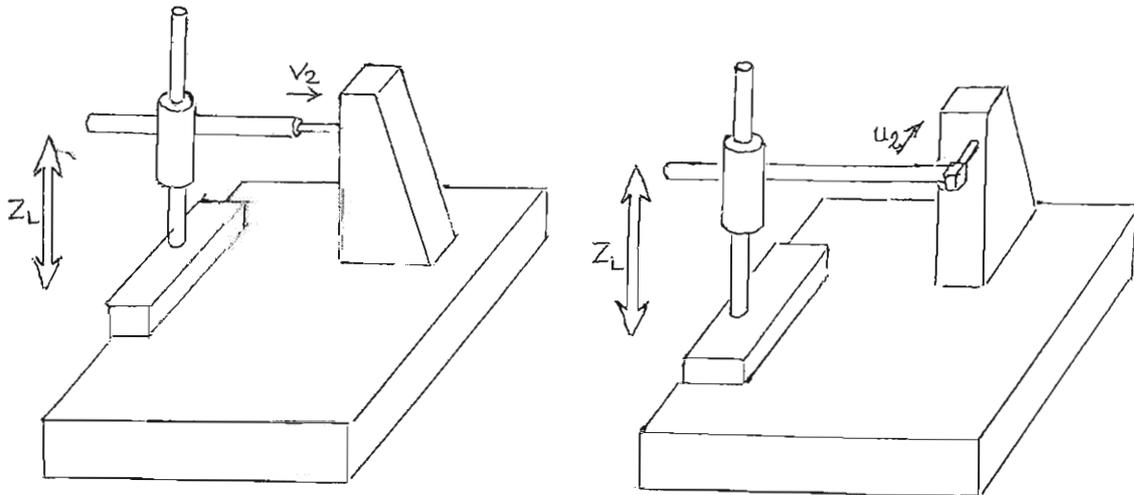
Cette solution n'a pas pu être mise en oeuvre faute de marbre de référence portable de grande dimension. On choisirait dans ce cas comme origine des mesures :

$$\gamma_2^* [z_L=0] = -\gamma_1 [x_L] \text{ avec } x_L = \text{cte et le paramètre } y_L = 0$$

$$\text{correspondant à } \gamma_3 [y_L] = 0$$

7.2.4.3 Les écarts de rectitude u_2 et v_2 sont obtenus en utilisant la même procédure que celle décrite pour l'obtention des écarts de rectitude u_1 et v_1 .

Les droites de référence sont matérialisées par des équerres en marbre.



Des équations (1) et (2) on en déduit les 2 relations :

$$e_{2x} = u_2 [z_L] - (b_2 + b_3 + y_L) \cdot \gamma_2 [z_L] + (c_2 + c_3) \cdot \beta_2 [z_L]$$

$$e_{2y} = v_2 [z_L] - (c_2 + c_3) \cdot \alpha_2 [z_L] + (a_2 + a_3) \cdot \gamma_2 [z_L]$$

L'angle $\gamma_2 [Z_L]$ étant inconnu, on minimise son influence en choisissant d'effectuer les mesures avec les longueurs a_2+a_3 et $b_2+b_3+Y_L$ minimum.

Afin de minimiser l'incertitude due à la non connaissance de γ_2 on choisit les longueurs a_2+a_3 et $b_2+b_3+Y_L$ minimum.

7.2.5 Mesure des 5 écarts géométriques de la liaison prismatique d'axe oy_3 entre les solides (S_2) et (S_3).

7.2.5.1 Les écarts angulaires $\alpha_3 [Y_L]$ et $\gamma_3 [Y_L]$ sont obtenus par interférométrie laser (graphes 6 et 7).

Comme précédemment le choix judicieux des origines des angles mesurés α_3^* et γ_3^* entre les solides (S_3) et (S_0) permet de connaître directement les angles cherchés α_3 et γ_3 entre les solides (S_3) et (S_2)

ainsi pour $X_L = \text{cte}$ et $Z_L = \text{cte}$ on impose :

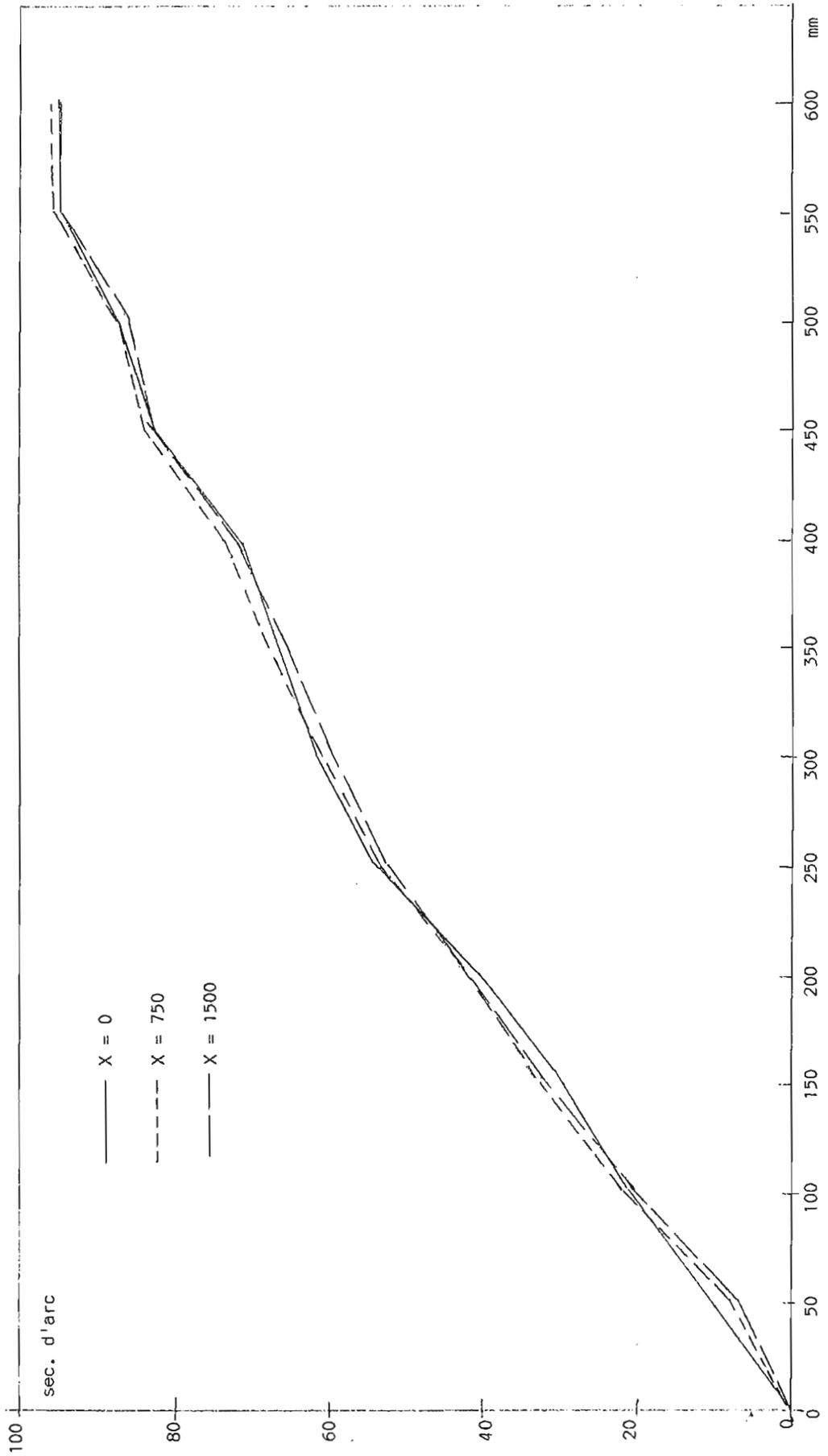
$$\alpha_3^* [Y_L=0] = -\alpha_1 [X_L] - \alpha_2 [Z_L]$$

$$\gamma_3^* [Y_L=0] = -\gamma_1 [X_L] - \gamma_2 [Z_L]$$

et $\gamma_3 [Y_L] = \alpha_3^* [Y_L] - \delta_{\alpha_3} [Y_L, Q]$

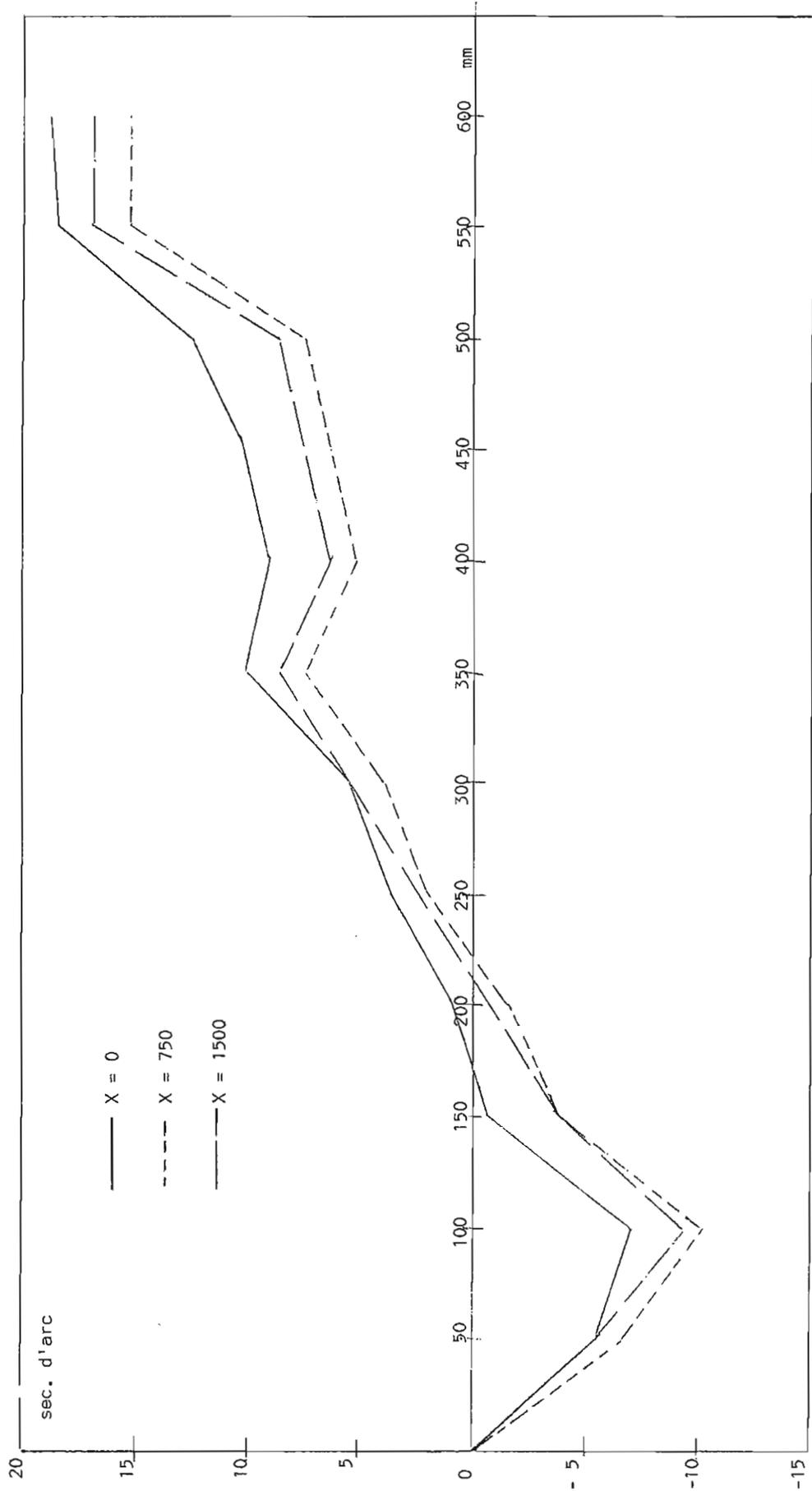
$$\gamma_3 [Y_L] = \gamma_3^* [Y_L]$$

Défaut de rotation autour de l'axe X
Déplacement suivant l'axe Y
Analyse du défaut α_3

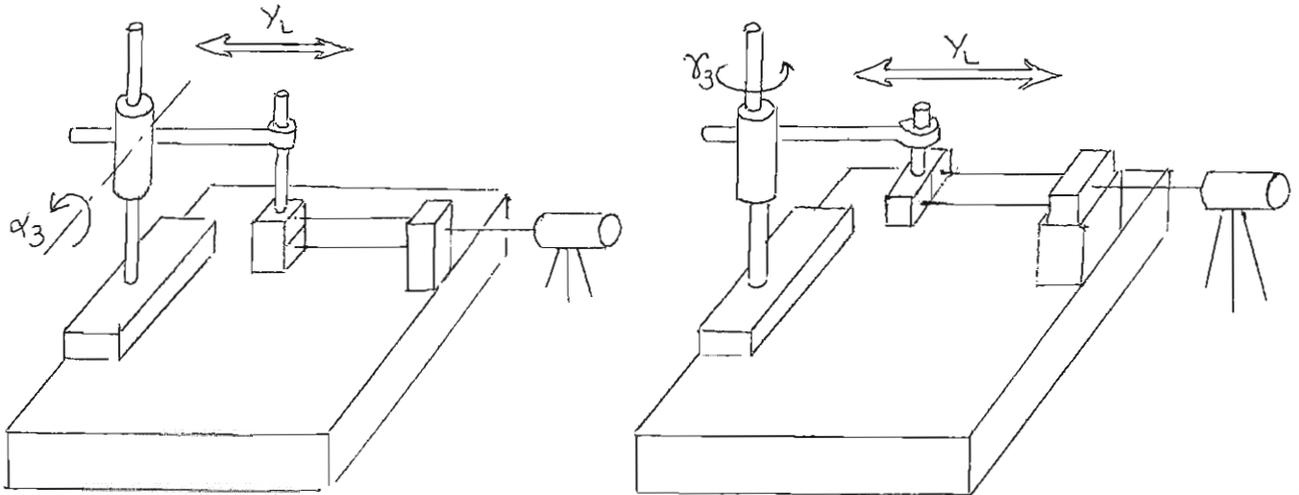


GRAPHE : 9 écart angulaire α_3

Défaut de rotation suivant l'axe Z
Déplacement suivant l'axe Y
Analyse du défaut γ_3



GRAPHE : 7 écart angulaire γ_3



L'angle γ_2 étant inconnu on choisit $Z_L=0$ soit $\gamma_2=0$

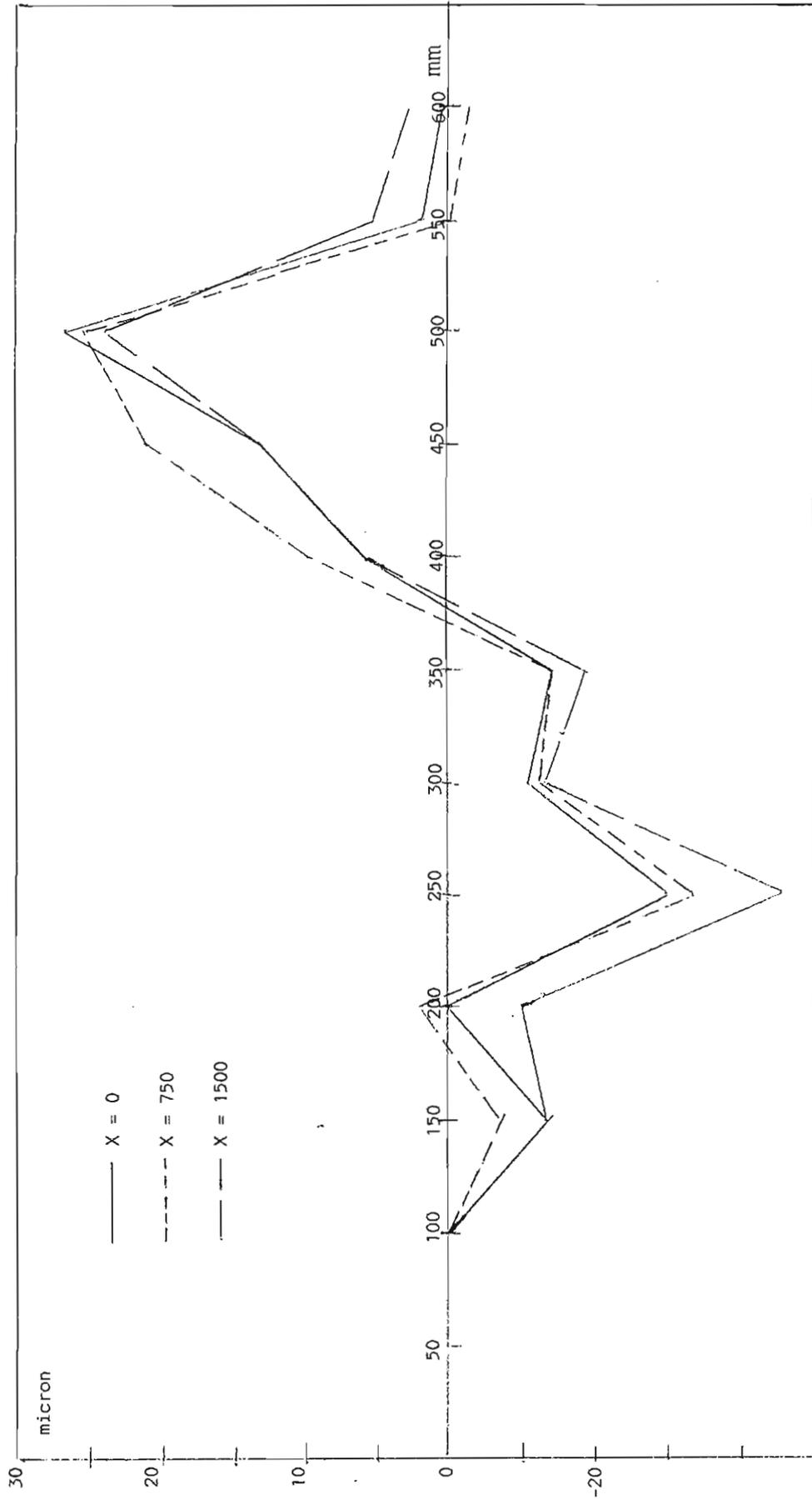
7.2.5.2 L'écart angulaire $\beta_3 [Y_L]$ est obtenu par mesure différentielle de deux niveaux électroniques placés l'un sur le solide (S_3), l'autre sur le solide (S_0), le solide (S_2) ne permettant pas une bonne stabilité du niveau.

Comme précédemment l'origine de l'angle β_3 est :

$$\beta_3 [Y_L=0] = - \beta_1 [X_L] - \beta_2 [Z_L]$$

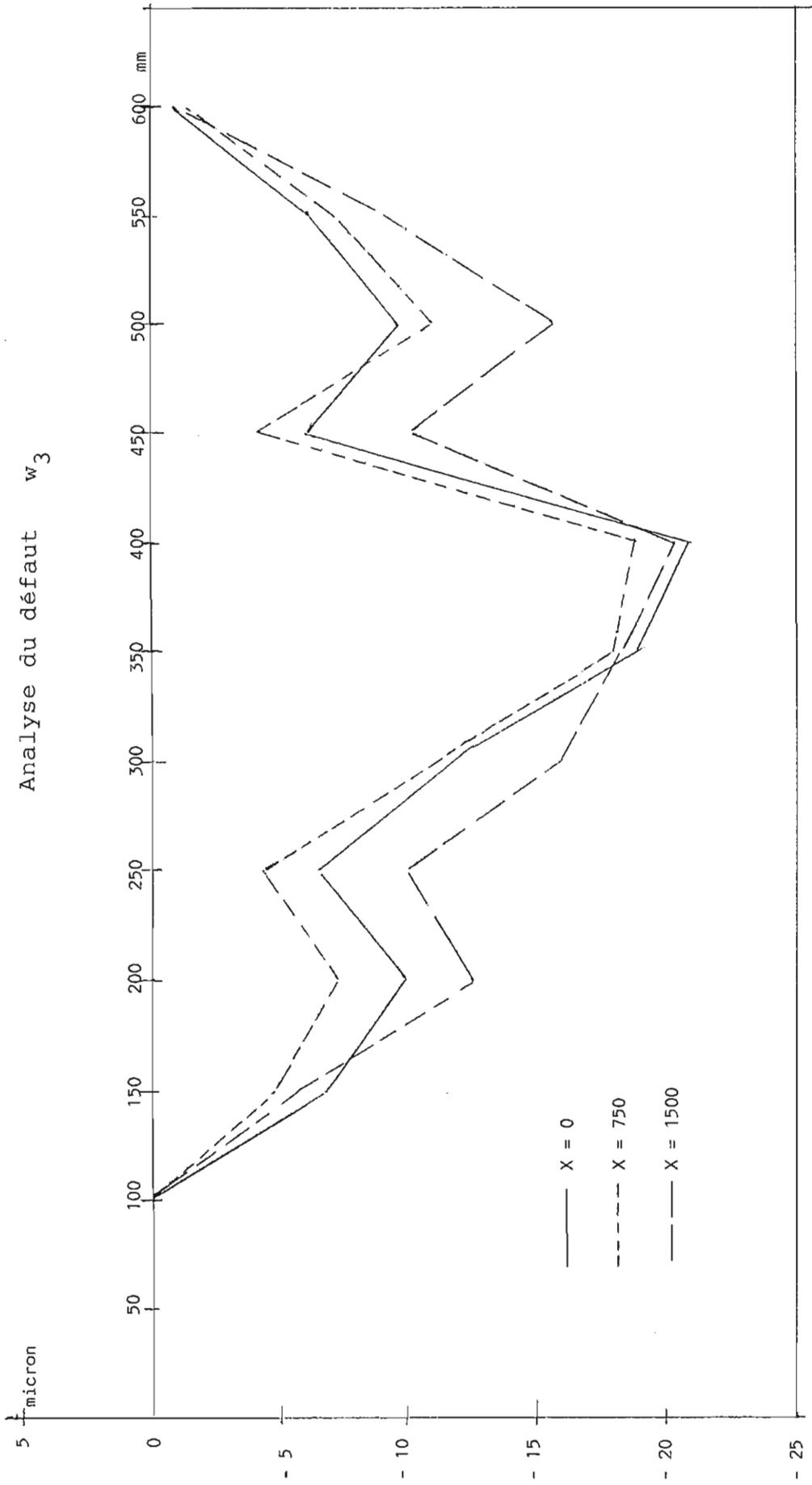
7.2.5.3 Les écarts de rectitude $u_3 [Y_L]$ et $v_3 [Y_L]$ sont obtenus en suivant la méthodologie décrite précédemment, c'est-à-dire par mesure des écarts e_{xi} et e_{zi} entre la translation d'axe Y_L d'un point P et d'une droite de référence d'indice i.

Défaut de rectitude de direction X
Déplacement suivant l'axe Y
Analyse du défaut u_3



GRAPHE : 8 écart de rectitude u_3

Défaut de rectitude de direction Z
Déplacement suivant l'axe Y
Analyse du défaut w_3

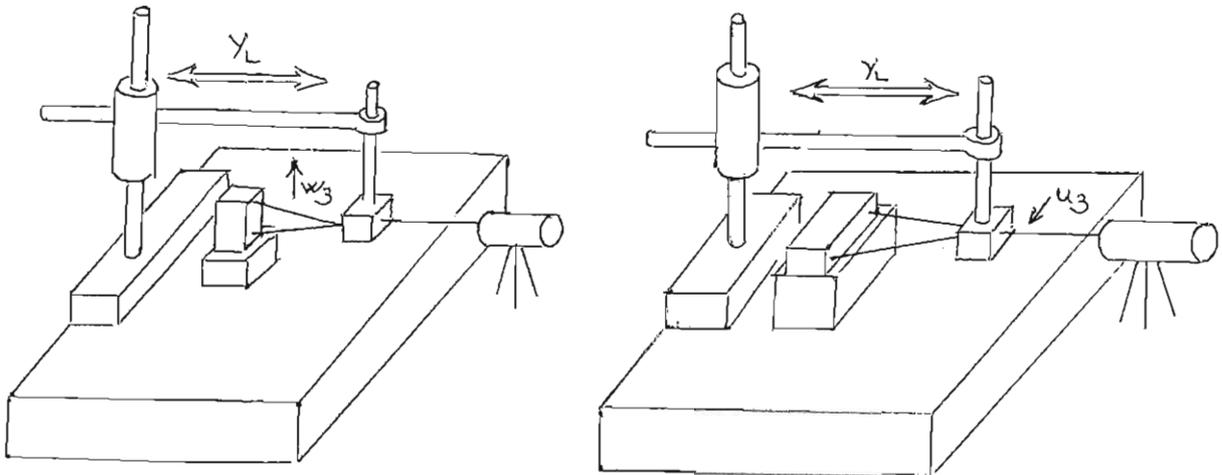


GRAPHE : 9 écart de rectitude w_3

Les écarts e_{xi} et e_{zi} sont liés par les relations déduites des équations (1) et (3) :

$$e_{3x} = u_3 [Y_L] - b_3 \cdot \gamma_3 [Y_L] + c_3 \beta_3 [Y_L]$$

$$e_{3z} = w_3 [Y_L] + \delta \cdot w_3 [Y_L, Q] - a_3 \cdot \beta_3 [Y_L] + b_3 \cdot \alpha_3 [Y_L] + \delta \cdot \alpha_3 [Y_L, Q]$$

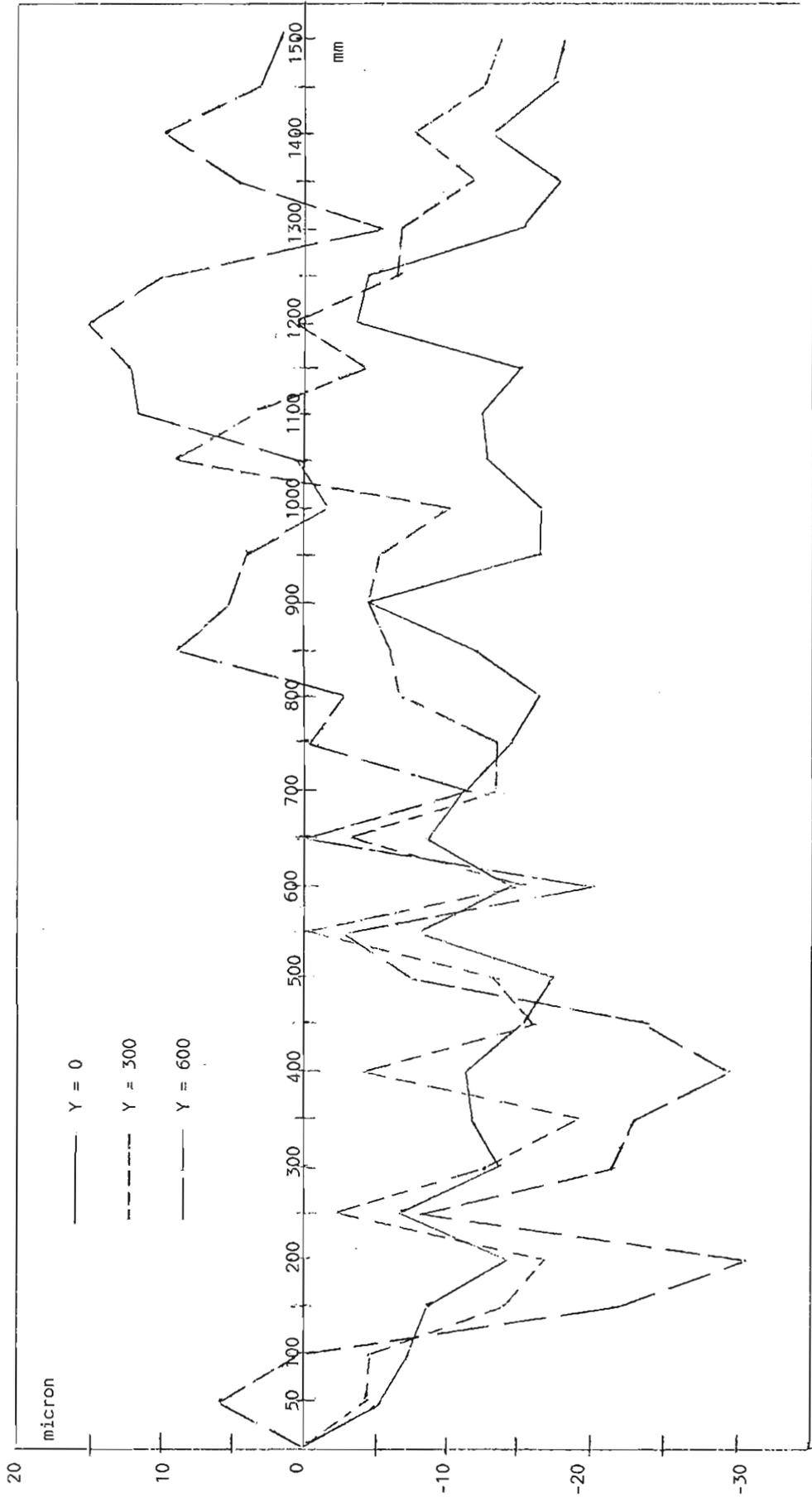


L'observation des résultats de mesure donnés graphes 8 et 9 permet de vérifier l'hypothèse de liaisons rigides et montre que l'écart de rotation β_3 entre les solides S_2 et S_3 est négligeable : $|\beta_3| < 0,8 \mu / m$.

7.2.6 Mesure des 3 justesses $\epsilon_x [X_L]$, $\epsilon_y [Y_L]$, $\epsilon_z [z_L]$:

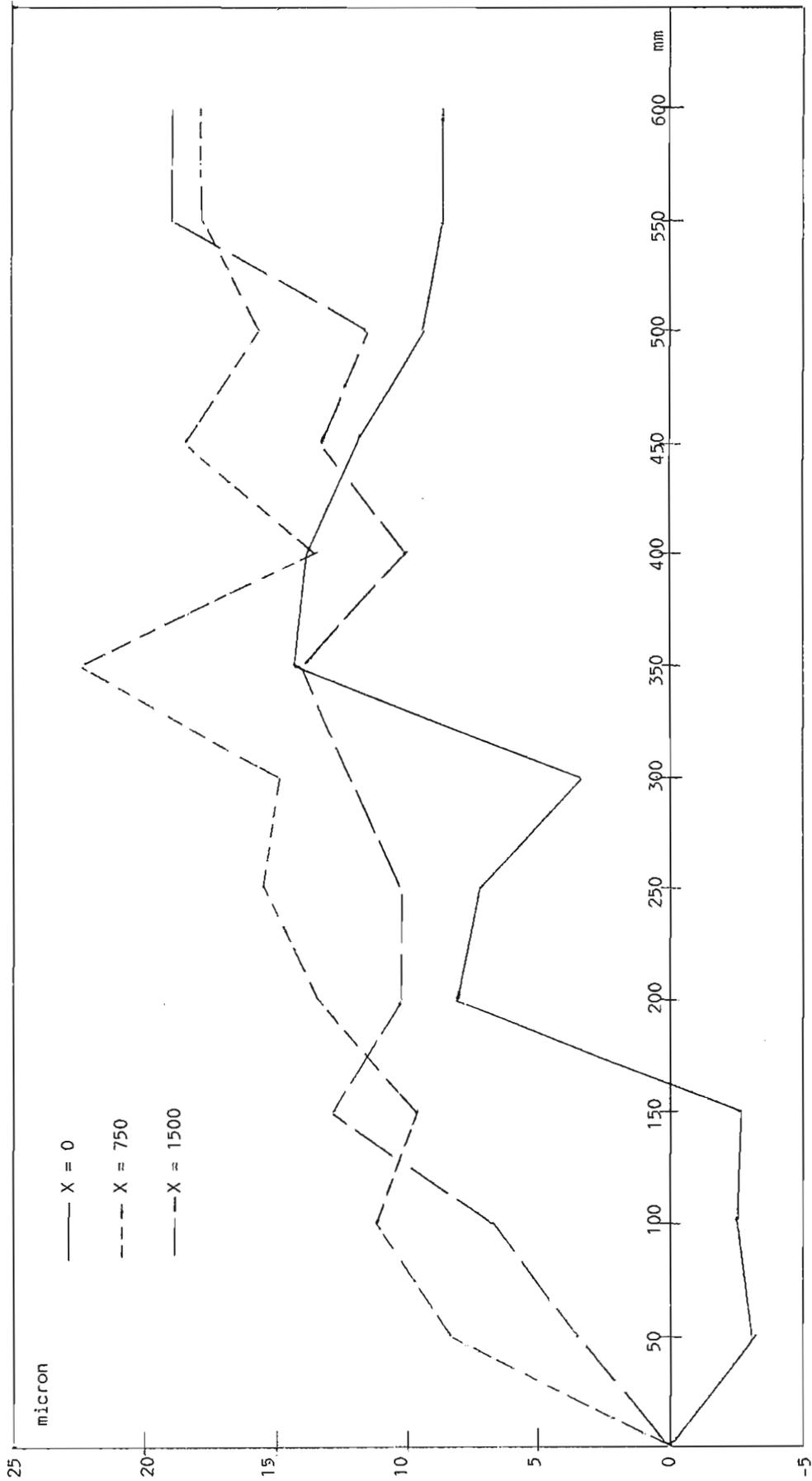
Les trois justesses ont été obtenues en comparant les déplacements X_{Li} , Y_{Li} , Z_{Li} lus sur les 3 règles de la machine à mesurer et la mesure réelle de ces mêmes déplacements obtenus par interférométrie laser, X_{Ri} , Y_{Ri} , Z_{Ri} .

Défaut de justesse
Déplacement suivant l'axe X
Analyse du défaut ϵ_x



GRAPHE : 10 écart de justesse ϵ_x

Défaut de justesse
Déplacement suivant l'axe Y
Analyse du défaut ϵ_x



GRAPHE : 11 écart de justesse ϵ_x

Des équations (1), (2), (3), on établit les trois relations :

$$\epsilon_{xi} [X_L] = X_{Li} - X_{Ri} - ((c_1 + c_2 + c_3 + Z_L) \cdot \beta_1 [X_L] - (b_1 + b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \gamma_1 [X_L])$$

$$\epsilon_{yi} [Y_L] = Y_{Li} - Y_{Ri} - ((-c_3 \cdot \alpha_3 [Y_L] + \delta_{\alpha_3} [Y_L, Q] + a_3 \cdot \gamma_3 [Y_L])$$

$$\epsilon_{zi} [Z_L] = Z_{Li} - Z_{Ri} - ((-a_2 + a_3) \cdot \beta_2 [Z_L] + (b_2 + b_3 + Y_L) \cdot \alpha_2 [Z_L])$$

On obtient une dispersion importante sur les résultats (graphes 10 et 11). En effet, la lecture des règles (X_L , Y_L , Z_L) se fait avec une tolérance de $\pm 5 \mu$, qui se répercute directement sur les écarts de justesse. Compte tenu de la technologie des règles de mesure utilisées on prend comme modèle de justesse une droite des moindres carrés.

7.2.7 Mesure des trois défauts d'orthogonalité entre les axes :

Les 18 écarts systématiques dûs aux défauts géométriques des liaisons et à la justesse des règles ont été exprimés dans les repères suivant :

- les 9 écarts angulaires ont été choisis nuls aux origines des 3 axes et sont cohérents entre-eux.
- les 3 écarts de justesse sont exprimés suivant les 3 directions des règles de mesures, elles peuvent être considérées comme orthogonales, en effet l'erreur introduite sur les justesses par la non-orthogonalité des axes est du second ordre.

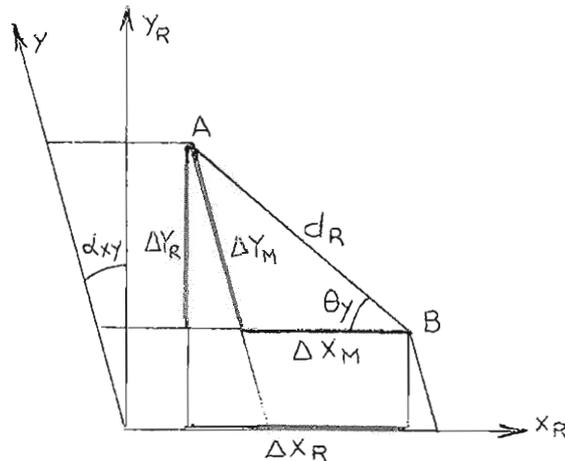
- les 6 écarts de rectitude ont été établis par rapport à 6 directions de mesures choisies indépendamment les unes des autres. Le système d'axes ainsi défini n'est pas orthogonal et introduit des erreurs non négligeables sur les calculs géométriques.

7.2.7.1 Méthode de détermination des défauts d'orthogonalité entre les axes.

Soient α_{xy} , α_{yz} , et α_{zx} les trois défauts d'orthogonalité entre les directions générales des rectitudes mesurés dans les trois plans xy , yz , et zx .

La méthode utilisée consiste à mesurer successivement dans des plans parallèles aux plans de référence de la machine une dimension de référence d_R étalonnée. Cette mesure est effectuée après compensation des 18 défauts établis précédemment, la machine à mesurer ne possède donc plus que les trois défauts angulaires cherchés.

Si dans un plan parallèle au plan xy on mesure la longueur AB de la dimension de référence on obtient :



(1) $d_M = \Delta X_M \cos \theta_y + \Delta Y_M \sin \theta_y$
avec ΔX_M et ΔY_M les projections mesurées de AB .

Si ΔY_R et ΔX_R sont les projections de AB dans un système d'axes orthonormés

$$\text{on a } \Delta X_R = \Delta X_M + \Delta Y_M \sin(\alpha_{xy})$$

$$\text{et } \Delta Y_R = \Delta Y_M \cos(\alpha_{xy}).$$

L'équation (1) devient :

$$d_M = \Delta X_R \cdot \cos \theta_y + \frac{\Delta Y_R}{\cos(\alpha_{xy})} \cdot \sin \theta_y - \Delta Y_M \cdot \sin(\alpha_{xy}) \cdot \cos \theta_y.$$

L'angle α_{xy} étant très petit on obtient l'erreur angulaire entre les axes \vec{y} et \vec{y}_R : (l'axe \vec{x} étant confondu avec l'axe \vec{x}_R)

$$\alpha_{xy} = \frac{d_R - d_M}{\Delta Y_M \cdot \cos \theta_y}$$

avec $d_M = \sqrt{\Delta X_M^2 + \Delta Y_M^2}$ et $\sin \theta_y = \frac{\Delta Y_M}{d_R}$

de la même façon on obtient :

dans le plan $\vec{y} \vec{z}$ l'angle α_{yz} entre les axes \vec{z} et \vec{z}_R l'axe \vec{y} restant confondu avec l'axe \vec{y}_R

$$\alpha_{yz} = \frac{d_R - d'_M}{\Delta Z_M \cdot \cos \theta_z}$$

avec $d'_M = \sqrt{\Delta Y_M^2 + \Delta Z_M^2}$ et $\sin \theta_z = \frac{\Delta Z_M}{d_R}$

dans le plan \vec{z} \vec{x} l'angle α_{zx} entre les axes \vec{x} et \vec{x}_R l'axe \vec{z} restant confondu avec l'axe \vec{z}_R

$$\alpha_{zx} = \frac{d_R - d''_M}{\Delta X_M \cdot \cos \theta_x}$$

avec $d''_M = \sqrt{\Delta Z_M^2 + \Delta X_M^2}$ et $\sin \theta_x = \frac{\Delta X_M}{d_R}$

7.2.7.2 Ajustement des rectitudes dans un systèmes d'axes orthonormés :

Afin de rendre le système d'axes orthogonal on substitut aux rectitudes déterminées précédemment les nouvelles rectitudes corrigées des défauts angulaires entre les axes.

dans le plan \vec{x}_O \vec{y}_O

$$v_1 [X_L] \text{ est inchangé}$$

$$u_3 [Y_L] = u_3 [Y_L] - \alpha_{xy} \cdot Y_L$$

dans le plan \vec{y}_O \vec{z}_O

$$w_3 [X_L] \text{ est inchangé}$$

$$v_2 [Z_L] = v_2 [Z_L] - \alpha_{yz} \cdot Z_L$$

dans le plan \vec{z}_O \vec{x}_O

$$u_2 [Z_L] \text{ est inchangé}$$

$$w_1 [X_L] = w_1 [X_L] - \alpha_{zx} \cdot X_L$$

7.2.8 Vérification expérimentale et conclusion :

Les défauts d'orthogonalité des axes ont été établis par mesure d'une cale étalon de 500 mm placée à 45° dans les différents plans de référence de la machine.

La connaissance des 18 écarts dans un système d'axe orthonormés nous a permis ensuite de vérifier l'efficacité de la correction. Pour cela nous avons mesuré à nouveau la cale étalon de 500 mm dans le volume de la machine. Des écarts sans correction atteignant 0,2 sont descendus à 0,02 après correction. Cette vérification a été faite dans le volume utile de la machine.

Les déformations dues aux variations de température peuvent être simplement corrigées [ZHA.85] en mesurant les températures T_1 et T_2 aux points extrêmes de la machine. On introduit alors sur chaque axe un facteur correctif de la forme :

$$\Delta X_T = k_{TX} \cdot \vec{O_1 O_1} \cdot \vec{x}_O \left(((T_1 + T_2) / 2) - 20 \right)$$

$$\Delta Y_T = k_{TY} \cdot \vec{O_1 O_2} \cdot \vec{y}_O \left(((T_1 \cdot T_2) / 2) - 20 \right)$$

$$\Delta Z_T = k_{TZ} \cdot \vec{O_2 O_3} \cdot \vec{z}_O \left(((T_1 + T_2) / 2) - 20 \right)$$

Les coefficients k_T sont difficiles à obtenir en effet ils nécessitent une salle de mesure à température régulée que nous ne possédions pas pour cette expérimentation.

On peut conclure que la prise en compte des 15 écarts systématiques dûs aux défauts géométriques des liaisons et aux justesses des règles de mesures, permet d'améliorer considérablement (facteur 10 dans l'exemple traité) la qualité d'une machine à mesurer, la prise en compte des variations de température devraient améliorer encore cette précision.

La méthode utilisée a également l'avantage de prendre en compte la géométrie réelle du palpeur par les coordonnées a_3 , b_3 , et c_3 du centre de la sphère de palpation dans le repère O_3 , x_3 , y_3 , z_3 attaché au solide (S_3) et de corriger ainsi les écarts angulaires de la machine.

Cette méthode a fait l'objet d'un logiciel [MOR.87] [LEH.87] permettant de déterminer puis de compenser les défauts géométriques des machines à mesurer de type Trusquin. L'acquisition des écarts géométriques de la machine a été simplifiée en effectuant les mesures d'angles et de rectitudes à l'aide de deux comparateurs électroniques et de référence matérialisés par le marbre de la machine, ainsi qu'une règle et une équerre en marbre. Seule la mesure des trois justesses nécessite l'emploi d'un laser. La mise au point des procédures de mesure a été faite avec le Laboratoire d'Essais de Machines-Outils de l'E.N.S. de CACHAN, le temps moyen de mesure d'une machine a pu être ramené actuellement à moins de trois jours.

L'emploi industriel d'un tel logiciel permet par le contrôle géométrique périodique de la machine d'en compenser immédiatement ses défauts. D'autre part une étude dans le temps, doit nous permettre de mettre en évidence pour chaque machine les dérives des différents défauts et par suite de limiter le contrôle aux seules mesures à forte probabilité de variation, le temps de réajustement d'une machine sera ramené ainsi à moins de huit heures.

CHAPITRE VIII

CONCLUSIONS

Ce travail montre l'importance prise par la mesure tridimensionnelle dans les systèmes de production et la nécessité d'en définir la meilleure qualité. Celle-ci impose d'une part un choix judicieux des paramètres nécessaires à l'identification géométrique des surfaces et des relations de position entre éléments géométriques, et d'autre part elle pose le nouveau problème de l'identification géométrique d'un appareil de mesure tridimensionnel. Toute cette étude repose sur l'approche générale du torseur de petits déplacements [BOU.72] , [BOU.76] développée au chapitre III qui permet de prendre en compte les six paramètres nécessaires et suffisants à l'approche tridimensionnelle de la métrologie.

Ainsi après avoir exposé dans le chapitre II une synthèse des différentes démarches actuellement suivies dans l'identification d'une surface fabriquée connue par un ensemble de points, nous avons proposé une méthode générale d'identification permettant d'associer à toute forme de surface, une surface géométrique idéale. Le critère d'optimisation choisi peut être aussi bien une répartition Gaussienne des écarts de forme mais également le défaut de forme mini ou la plus petite ou plus grande surface géométrique idéale tangente du côté libre de la matière. Une étude détaillée de ces différents critères appliquée aux cas de surfaces géométriques classiques en mécanique a été faite au chapitre IV. Une expérimentation a été ensuite menée au chapitre V et a permis une étude comparative des résultats obtenus par les différents critères d'optimisation appliqués à un même ensemble de points. L'expérimentation menée sur différents types de surfaces montre que le critère de Gauss actuellement retenu

dans la plupart des logiciels de mesure donne un défaut de forme supérieur de 15 % à celui que l'on obtiendrait en utilisant le critère normalisé du défaut de forme mini et ceci pour un nombre de points définissant la surface inférieure à douze. L'utilisation du critère défaut de forme mini est devenue possible grâce à un temps de calcul acceptable pour un résultat optimal.

Le chapitre VI montre ensuite que le problème de l'identification d'un ensemble de surfaces n'est pas lié uniquement à une définition strictement géométrique des surfaces mais à une définition fonctionnelle de la pièce dans un ensemble mécanique. La nouvelle approche proposée permet de faire coïncider au mieux métrologie et cotation fonctionnelle, les surfaces de la pièce sont ainsi identifiées en optimisant directement leur fonctionnalité. Cette nouvelle approche appelée métrologie fonctionnelle a été appliquée à l'ensemble des cas d'association de deux surfaces ou une définition strictement géométrique n'était pas suffisante et nécessitait une interprétation géométrique des résultats de la part du métrologue. Nous avons également expérimenté cette approche sur quelques exemples ou le nombre de surfaces est supérieur à deux et résolu entre-autre le problème du contrôle des cotes au maximum de matière. La notion de métrologie fonctionnelle peut être étendue à d'autres applications telles que le réglage optimal des machines outils et des montages d'usinage.

Le chapitre VII montre l'identification d'une machine à mesurer tridimensionnelle par la détermination des 15 écarts géométriques des trois liaisons prismatiques, des 3 écarts dûs au défaut de justesse des règles, des 3 défauts d'orthogonalité des axes de la machine, ainsi que des écarts dûs aux déformations. L'analyse faite a permis d'explicitier l'origine des écarts et de les définir par une procédure basée sur la méthode générale proposée au chapitre III. Une expérimentation faite sur une machine à mesurer tridimensionnelle du type Trusquin montre que l'on peut améliorer dans ce cas la précision d'un facteur dix. Cette étude détaillée a permis de définir une procédure

industrielle d'identification et de compensation des défauts géométriques, celle-ci devrait être encore affiner par une étude du comportement des défauts dans le temps, ce qui permettrait de limiter le contrôle périodique de la machine aux seuls défauts à forte probabilité de variation.

Nous pouvons dire que les objectifs de ce travail sont atteints, l'expérimentation et l'utilisation industrielle de certaines des méthodes décrites confirment la validité du modèle proposé. Les critères d'optimisation de défaut de forme mini et de plus grande ou plus petite surface tangente devraient enrichir les possibilités des logiciels de mesure tridimensionnelle. Quant à la métrologie fonctionnelle proposée celle-ci devrait trouver son application dans le concept plus large d'une production intégrée ou la cotation fonctionnelle de la pièce aura une incidence directe sur le réglage des machines outils des montages d'usinage et sur le contrôle dimensionnel des pièces produites.

B I B L I O G R A P H I E

-
- BOR.75 R.LE BORZEC , J.LOTTERIE ,
"Principes de la théorie des mécanismes". DUNOD
1975.
- BOU.72 R.BOUDET ,
"Mobilité."
I.E.T. 6-1972.
- BOU.72 P.BOURDET , A.CLEMENT ,
"Optimisation des montages d'usinage."
Contrat de recherche DRME 1972.
- BOU.75 P.BOURDET , A.CLEMENT ,
"Metrologie automatique"
Journée du GAMI. PARIS mai 1975.
- BOU.76 P.BOURDET , A.CLEMENT ,
"Controlling a complex surface with a 3 axis.
Measuring machine".
Annals of C.I.R.P., vol. 25/1/1976 p. 354-361.
- BOU.78 P.BOURDET , A.CLEMENT ,
"A program to aid measurement on a 3-D measuring
machine."
C.I.R.P. HAIFA 1978.
- BOU.78 P.BOURDET , A.CLEMENT ,
"Automatisation du contrôle tridimensionnel des
pièces mécaniques."
2ème Journée de la Production Automatisée. PARIS
1978.
- BOU.79 P.BOURDET ,
"Identification géométrique des pièces mécaniques."
Thèse de 3ème cycle PARIS VI, Année 1979.
- BOU.84 P.BOURDET , G.GAUTHERIN,
"L'ilot flexible de production mécanique à l'ENSET"
Conférence des Grandes Ecoles, juin 1984.

- BOU.84 P.BOURDET, A.CLEMENT, R.WEILL,
"Methodology and comparative study of optimal
identification processes for geometrically defined
surfaces"
Proceedings of International Symposium on Metrology
for Quality Control in Production, TOKYO 1984.
- CHR.80 P.CHRETIENNE, Y.PESQUEUX, J.C. GRANDJEAN,
"Algorithmes et pratique de programmation linéaire"
Edition Technip, 1980.
- CLE.72 A.CLEMENT ,
"Mobilité des chaînes cinématiques complexes"
STROSNICKY CASOPIS (Tchécoslovaquie)
Tome XXIII, Fac. 2 1972, p. 5-7.
- CLE.76 A.CLEMENT ,
"Structure algébrique des mécanismes en vue de la
conception assistée par ordinateur",
Thèse 3 ème cycle PARIS VI 1976.
- CLE.79 A.CLEMENT , H.SAGHBINI ,
"Identification d'une courbe par une série de cercles
osculateurs".
Congrès O.R.L. BOBIGNY 1979.
- CLE.80 A.CLEMENT,
"Modélisation des erreurs de trajectoires des
machines-outils , des machines à mesurer
tridimensionnelles et des robots".
Congrès Euromech BESANCON juin 1980 (communication)
- CLE.81 A.CLEMENT, P.BOURDET, R.WEILL,
"Commande adaptative dimensionnelle des machines
à mesurer 3D",
C.I.R.P. Annals, Manufacturing Technology,
vol.32/1/83, 1983.
- CLE.81 A.CLEMENT , P.BOURDET ,
"Commande adaptative dimensionnelle des machines
et des robots."
Annals of C.I.R.P. Toronto 1981.
- CLE.82 A.CLEMENT,
"Identification et génération de courbes discrétisées
dans un univers mécanique imprécis - Application
à la réalisation d'un robot de soudage"
Thèse de Doctorat-ès-Sciences, Université de NancyI,
janvier 1982.

- FAI.86 D.FAINGUELERNT, R.WEILL, P.BOURDET,
"Computer aided tolerancing and dimensioning in
process planning"
C.I.R.P, Annals 1986, Manufacturing Technologie,
Vol.35/1/1986.
- FER.86 P.M. FERREIRA. C.R. LIU, E.MERCHANT,
"A contribution to the analysis and compensation
of the geometric error of a machining center",
Annals of the C.I.R.P., vol. 35/1/1986
- FOU.79 J.M.FOUET ,
"Conception par ordinateur de mécanismes à une
boucle",
Thèse de 3ème Cycle PARIS VI.
- HOC.77 R.HOCKEN , J.A.SIMPSON , B.BORCHARDT , J.LAZAR
C.RUVE , P.STEIN ,
"Three dimensionnal metrology"
Annals of C.I.R.P. vol. 26/2/1977, p.403-408.
- JOU.84 F.JOUY,
"Une machine à coordonnées (MOCN,MMT) peut-elle
identifier ses propes défauts géométriques ?"
Journées du GAMI, Ecole centrale de PARIS, déc.
1984.
- JOU.86 F.JOUY, A.CLEMENT
"Theoretical Modelisation and Experimental
Identification of the Geometrical parameters of
coordinate - machines by Measuring a Multi-Directed
Bar",
Annals of C.I.R.P. Vol. 35/1/1986.
- KEG.79 R.L.KEGG ,
"Metrology problems in unmanned machining. Technology
development department Cincinatti Milacron INC.
Cincinatti Ohio 45209
C.I.R.P., Working Group "Q" déc. 1979.
- KNA.83 W.KNAPP, E.MATTHIAS, ETH ZURICH,
"Test of the three - Diminsional uncertainty of
machine tools and measuring machines and its relation
to the machine errors."
Annals of the C.I.R.P. Vol. 32/1/1983.

- KOB.79 E.KOBRINSKILL,
"Automation of measurement using coordinate
measuring machines",
Machines tooling, vol. 50, N°1, 1979.
- KUN.83 H.KUNZMANN, F.WALDELE,
"On Testing Coordinate Measuring Machines (CMM)
with Kinematic Reference Standards (KRS),
Annals of the C.I.R.P., vol. 32/1/1983.
- LEH.87 LE HUEROU,
"Caractérisation d'une machine à mesurer-Analyse
et expérimentation"
L.U.R.P.A. - D.E.A. de production automatisée
Mémoire de recherche juin 1987
- LER.86 J.P. LEROY,
"Procédure informatisée de correction des montages
d'usinage modulaires"
Mémoire Diplôme d'ingénieur CNAM de PARIS en
mécanique. février 1986.
- MIN.83 M. MINOUX
"Programmation mathématique- Théorie et algorithmes
- tome 1 ". 1983
- MIR.86 Th.MIRONNEAU ,
"Etude comparative des méthodes d'optimisation
des surfaces en métrologie dimensionnelle."
L.U.R.P.A - D.E.A de production automatisée -
Mémoire de recherche juin 1986.
- MIT.82 "La technique de mesure à 3 coordonnées" à l'Ecole
Technische Rundochau N°40, 1982.
- MOR.87 J. MOREAU,
"Caractérisation d'une machine à mesurer - procédure
de correction - Mémoire,
Diplome Ingénieur CNAM, 1987.
- NAW.81 NAWARA, M.KOWALSKI, J.KACZMARCK,
"Investigation on the variability of the result
of measurements realized by multicoordinate
measuring machines on circular section with
determined types of roundness error."
Annals of the C.I.R.P., vol. 30/1/81, page 437

- NF.83 "Dessins techniques - Tolérancement géométrique Généralités - Définitions - Symboles. Indications sur le dessin E 04.552, nov. 83.
- NF.84 "Dessins techniques - Cotation et tolérancement Tolérancement géométrique - E 04.553, dec. 1984.
- RIC.85 J.RICHARD
"Contrôle dimensionnel et suivi de production dans un ilot automatisé de fabrication de pièces mécaniques - Analyse des mesures et prédiction des corrections."
Thèse de Doctorat-ès-Sciences Physiques, Université de nancy 1, février 1985.
- RIS.78 C.RIS, M.VERON,
"Interchangeabilité des robots,
11th C.I.R.P International Seminar on Manufacturing Systems. NANCY 1978.
- RIS.81 G.RIS,
"Contribution à l'identification des défauts d'un robot. Application à l'interchangeabilité",
Thèse de Doctorat-ès-Sciences Physiques, Université de Nancy 1, 26 mars 1981.
- SCH.81 R.SCHULSCHIK,
"Possibilities and limit for the feed back of dimensional errors by automatic manufacturing",
C.I.R.P. Annals, vol. 30, pp 467-473, 1981.
- SCH.82 B.SCHATZ,
"Mesures dimensionnelles - Techniques de l'Ingénieur
- SCH.86 B.SCHATZ,
"Etude d'un étalon tridimensionnel pour la vérification des machines à mesurer 3 D.
Journées du CUPRAM. nov.86.
- SEI.78 S.E.I.V.
"Description de la M.M.T. 130806",
Documentation Technique S.E.I.V., 1978.

- SIE.73 SIESTRUNCK,
"Quelques aspects nouveaux de la théorie des
mécanismes et applications"
Revue Française de Mécanique. N°45. 1973.
- SUL.74 SULZER G., MOLLER M.,
"Zahnrad messung mit numerisch geführter 3."
Koordinator Messmaschine.
VDI-2116 (1974) Nr.14, Seite 1161-1163.
- SZA.83 M.SZAFARCZYK, M. MISIEWKI,
"Automatic measurement and correction of workpiece
diameter on NC centre lathe",
C.I.R.P. Annals, Manufacturing Technology, vol.
32/1/83, 1983.
- VER.82 M.VERON, J.RICHARD, P.MARTIN, G.RIS,
"Integrated dimension control with measuring machine
in a manufacturing cell",
Proceedings on Manufacturing cells.
14th International Seminar on Manufacturing Systems,
Trondheim, 28-29 June 1982.
- YAN.77 H.YANO , T.NAKAMURA ,
"Simplified method of evaluating the measurement
error of the coordinate measuring machine."
Annals of C.I.R.P. vol. 26/1/1977, p.235-240.
- ZHA.85 G.ZHANG., R.VEALE., T.CHARLTON., B.BORDCHARDT.,
R.HOUKEN,
"Coordinate Measuring Machines (CMM) with Kinematic
Reference Standards (KRS)
Annals of the C.I.R.P, vol. 32/1/1983.

BIBLIOGRAPHIE D'ORDRE GENERAL :

- BAB.79 H.G.BABIC, H.KAMP
"Determination of the necessary scope of inspection as a requirement of planning quality assurance in flexible manufacturing systems",
Information control problems in manufacturing technology, IFA/IFIP Symposium, 1979.
- BAM.80 M.BAMBACH, K.M. BREYER, U.GOPFERT.
"Consideration on the accuracy and inspection of coordinate measuring machines."
VDI-Z Band 122, 1980 Heft 93 p. 535-548.
- BER.85 A.BERNARD,
"Computer aided programming of complex shaves in numerical control".
Software for discrete manufacturing PROLAMAT 85,
PARIS - FRANCE Juin 1985.
- BEZ.77 P.BEZIER ,
"Essai de définition numérique des courbes et des surfaces."
Thèse d'état. PARIS VI. février 1977.
- CAP.83 F.CAPUTO, G.F.MICHELETTI,
"Some problems in design of flexible manufacturing systems",
C.I.R.P. Annals, Manufacturing Technology,
vol.32/1/83, 1983.
- COI.80 P.COIFFET , P.RIVES .
"Reconnaissance par un robot de l'orientation d'objets tridimensionnels en vue de tâches de saisie automatique."
RAIRO Vol. 14, N°1, 1980, p. 5-32.
- CRO.83 T.R. CROSSLEY, E.MERCHANT,
"Simulation of a flexible manufacturing system for the manufacture of sheet metal components",
C.I.R.P. Annals, Manufacturing Technology,
vol.32/1/83, 1983.

- DES.85 C.DESTOMBES, PAPANICOLA,
"Analyse fonctionnelle pour l'informatisation d'un
atelier automatisé flexible : application de la
méthode SADT.
Journées du GAMI, Ecole Centrale de Paris, déc.
1984,
Mécaniques Matériaux Electricité N° 410, Janvier
février 1985.
- FAU.82 I.FAUX,
"Improved quality through the application of computer
modelling of dimensioning and tolerancing",
Proceeding CAM-I, Computer Aided Quality Conference,
Baltimore, 1982.
- GOD.85 G.GODARD, P.BOURDET, P.D'HOINE, L.MATHIEU,
"Capteur laser de position et de surveillance de
l'usure d'outil de coupe"
Conférence : La Surveillance Automatique des outils
de Coupe CETIM, nov.85.
- GRI.82 D.K. GRIESON,
"Factories of the future",
Proceedings CAM-I, Computer Aided Quality Conference,
Baltimore, may 1983.
- LAT.79 J.C.LATOMBE ,
"Intelligence artificielle et production automatisée
quelques exemples."
ADEPA : 21ème Journée Scientifique et Technique
de la Production Automatisée. Nancy juin 1979,
p.233.
- LEW.82 J.W.LEWIS,
"CMM programming VIA IGES",
Proceedings CAM-I, Computer Aided Conference,
Baltimore, may 1982.
- MAR.80 P.MARTIN,
"Commande adaptative de machines-outils. Etude
d'un système d'optimisation de l'opération de
tournage avec mesure de l'usure de l'outil",
Doctorat-ès-Sciences Physiques, Université de Nancy1,
janvier 1980.

- PAP.82 D.PAPKE,
 "Computer aided quality assurance and CAD/CAM",
 Proceeding CAM-I, Computer Aided quality Conference,
 Baltimore, 1982.
- PUR.83 P.B. PURDOM,
 "The Citroen flexible manufacturing cell",
 Proceedings of the 2nd International Conference
 on Flexible Manufacturing Systems, London (U.K.),
 26-28 oct. 1983.
- REM.79 U.REMBOLD,
 "Recent advances in the use of computer in quality
 control",
 Information Control Problems in Manufacturing
 Technology, IFA/IFIP Symposium 1979.
 Proceedings of the second IFA/IFIP Symposium,
 Stuttgart (W.G.), pp 256-277, 22-24 oct. 1979.
- SAG.81 "Machines-Outils à commande numérique. Logiciel
 V3.3 : Mesure, calcul, test, édition. Gestion,
 usure d'outils",
 Document Technique SAGEM, décembre 1981.
- VER.73 M.VERON,
 "Contribution à l'étude des surfaces numériques
 unisurf - Conditions de raccordement."
 Thèse de Doctorat d'Etat. février 1973, Université
 de NANCY 1.

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS	2
CHAPITRE I - Préliminaire.	5
1.1 Introduction.	5
1.2 Contenu et contribution de ce manuscrit.	6
CHAPITRE II - Identification géométrique d'une surface fabriquée.	9
2.0 Introduction	
2.1 Rappel sur les méthodes de contrôle traditionnelles de surface.	10
2.2 Application au contrôle d'une surface fabriquée cylindrique.	12
2.3 Conclusion.	15
CHAPITRE III - Méthode générale d'identification géométrique d'une surface.	17
3.0 Présentation de la méthode générale.	
3.1 Méthode de Gauss.	20
3.1.1 Mise en équation détaillée - surface de rang 6 (critère de Gauss)	22
3.1.2 Application : contrôle d'une ferrure de réacteur	24
3.2 Méthode par programmation linéaire	26
3.2.1 Fonction objectif : défaut de forme mini	26
3.2.1.1 Mise en équation détaillée : surface de rang 6 (critère défaut de forme mini)	28
3.2.1.2 Application au contrôle d'une électrode laser	30
3.3 Critère de petits déplacements :	33
3.3.1 Comparaison des écarts ξ_i , e_i et d_i	34

3.3.2	Cas du cercle et de la sphère	35
3.3.3	Cas du plan	40
3.3.4	Cas général	41
3.3.5	Application de la formule générale au cylindre complet	42
3.4	Intégration du critère de petit déplacement dans la méthode générale proposée.	45
CHAPITRE IV - Etude détaillée de l'association d'une surface géométrique idéale à une surface palpée dans les cas de la droite du plan du cercle de la sphère, du cylindre et du cône		47
4.0	Présentation de l'étude détaillée	47
4.1	Définition de la surface géométrique idéale nominale	49
4.2	Définition des matrices de changement d'axes	51
4.3	Calcul à partir des points M_i : des points théoriques M_{thi} , des normales \vec{n}_i et des écarts ξ_i correspondants	53
4.4	Mise en équation du calcul du torseur de petits déplacements optimisé par la méthode de Gauss	57
4.5	Mise en équations du calcul du torseur de petits déplacements optimisé par la méthode du simplexe suivant la fonction objectif défaut de forme mini	63
4.6	Mise en équations du calcul du torseur de petits déplacements optimisé par la méthode du simplexe suivant la fonction objectif plus grande surface tangente intérieure, ou plus petite surface tangente extérieure.	67
4.7.	Connaissant le torseur d'écart, détermination des paramètres de la surface géométrique idéale associée à la surface fabriquée.	69
4.8	Etude du sens de la matière	71
4.9	Calcul du critère de petits déplacements C^*	73
CHAPITRE V - Etude comparative des résultats obtenus par une optimisation suivant différents critères		76
5.0	Introduction	
5.1	Cas du cercle	78

5.1.1	Résultats obtenus	79
5.1.2	Cas particulier d'un cercle palpé en 4 points	91
5.1.3	Influence du nombre de points sur le temps de calcul	93
5.1.4	Accroissement du défaut de forme obtenu par Gauss par rapport au critère défaut de forme mini	94
5.1.5	Conclusion	95
5.2	Cas du cylindre	95
5.3	Cas du plan	100
5.3.1	Résultats expérimentaux	100
5.3.2	Influence du nombre de points sur le temps de calcul	102
5.3.3	Variation du défaut de forme obtenu par le critère de défaut mini et le critère de Gauss	102
5.4	Influence des points aberrants sur les résultats obtenus par les différents critères d'optimisation	103
5.4.1	Cas du cercle palpé en 27 points défini dans l'étude comparative des différentes méthodes	104
5.4.2	Deuxième cas : cas du plan mesuré en 30 points étudiés précédemment	106
5.5	Conclusions	107
CHAPITRE VI - Identification tridimensionnelle d'une pièce mécanique		109
6.0	Introduction	
6.1	Première approche du problème : approche géométrique	111
6.1.1	Relations géométriques entre deux surfaces réelles	111
6.1.2	Cas de la distance entre deux droites	112
6.1.3	Cas d'une droite D et d'un plan P	113
6.1.4	Cas de deux surfaces planes	115
6.2	Proposition de définition des paramètres géométriques de position entre deux surfaces géométriques idéales associées à deux surfaces réelles	117

6.2.1	Paramètres géométriques entre une droite 1 et une droite 2 modélisées en deux droites parallèles	117
6.2.2	Paramètres géométriques entre une droite d_2 et une droite d_1	119
6.2.3	Paramètres géométriques entre deux droites quelconques faisant un angle θ	120
6.2.4	Paramètres géométriques entre une droite 1, un 2 à une distance l_0	121
6.2.5	Paramètres géométriques entre un plan 2 et une droite 1 parallèle et à une distance nominale l_0	122
6.2.6	Paramètres géométriques entre un plan 1 et une droite 2 inclinée d'un angle θ	123
6.2.7	Paramètres géométriques entre une droite 2 et un plan 1 inclinés d'un angle θ	124
6.2.8	Paramètres géométriques entre plan 1 et plan 2 parallèles à la distance l_0	125
6.2.9	Paramètres géométriques entre un plan 1 et un plan 2 inclinés d'un angle θ	126
6.3	Deuxième approche du problème : métrologie fonctionnelle	127
6.3.1	Distance entre deux plans P_1 et P_2	127
6.3.2	Métrologie fonctionnelle de 3 surfaces planes	133
6.3.3	Distance entre l'axe d'un cylindre (ou d'un cône) et d'un plan P	134
6.3.4	Métrologie fonctionnelle d'un cylindre de diamètre d et perpendiculaire à un plan P coté au maximum de matière	138
6.3.5	Distance entre deux axes de cylindres (ou de cônes) parallèles	139
6.3.6	Métrologie fonctionnelle de n cylindres (alésages) parallèles avec une condition d'assemblage sur n arbres	143
6.3.7	Conclusions	145
CHAPITRE VII	Correction des écarts géométriques d'une machine à mesurer tridimensionnelle	146

7.1	Modèle d'identification géométrique d'une machine à mesurer tridimensionnelle	148
7.1.1	Écarts systématiques dûs aux défauts géométriques des liaisons prismatiques	150
7.1.2	Écarts de justesse des règles de mesures	152
7.1.3	Écarts systématiques dûs aux déformations des différents solides	152
7.1.4	Écarts systématiques dûs à la technologie du palpeur électronique	152
7.1.5	Expression générale des coordonnées corrigées	153
7.2	Détermination expérimentale des écarts géométriques systématiques	154
7.2.1	Déformation des solides constituant la machine à mesurer	154
7.2.2	Mesure des écarts systématiques dûs aux liaisons entre les solides	157
7.2.3	Étude détaillée de la mesure des 5 écarts géométriques de la liaison prismatique d'axe x_0 entre les solides (S_0) et (S_1)	157
7.2.3.1	des deux écarts angulaires $\beta_1[X_L]$ et $\gamma_1[X_L]$	158
7.2.3.2	de l'écart angulaire $\alpha_1[X_L]$	161
7.2.3.3	des rectitudes $v_1[X_L]$ et $w_1[X_L]$	161
7.2.4	Mesure des 5 écarts géométriques de la liaison prismatique d'axe z_2 entre les solides (S_1) et (S_2)	163
7.2.4.1	des écarts angulaires $\alpha_2[Z_L]$ et $\beta_2[Z_L]$	163
7.2.4.2	de l'écart angulaire $\gamma_2[Z_L]$	166
7.2.4.3	des écarts de rectitude $u_2[Z_L]$ et $v_2[Z_L]$	167
7.2.5	Mesure des 5 écarts géométriques de la liaison prismatique d'axe oy_3 entre les solides (S_2) et (S_3)	168
7.2.5.1	des écarts angulaires $\alpha_3[Y_L]$ et $\gamma_3[Y_L]$	168
7.2.5.2	de l'écart angulaire $\beta_3[Y_L]$	171
7.2.5.3	des écarts de rectitude $u_3[Y_L]$ et $v_3[Y_L]$	171

7.2.6	Mesure des 3 justesses $X[X_L], Y[Y_L], \epsilon_z[Z_L]$	174
7.2.7	Mesure des trois défauts d'orthogonalité entre les axes	177
7.2.7.1	Méthode de détermination des défauts d'orthogonalité entre les axes	178
7.2.7.2	Ajustement des rectitudes dans un système d'axes orthonormés	180
7.2.8	Vérification expérimentale et conclusion	181
CHAPITRE VIII - Conclusions		183
BIBLIOGRAPHIE		186
ANNEXE A : Programmation linéaire : Algorithme primal du Simplexe		195
ANNEXE B : Définition d'un cône nominal de direction connue		202
ANNEXE C : Logiciel spécifique d'acquisition de points de mesure sur MMT.		206
ANNEXE D : Résultats expérimentaux dans le cas d'un cercle de diamètre 32 mm palpé en 27 points		208
ANNEXE E : Résultats expérimentaux dans le cas d'un cylindre de diamètre 199.5 mm palpé en 12 points		212
ANNEXE F : Résultats expérimentaux relatifs à l'étude statistique des points aberrants.		215
ANNEXE G : Liste des modules de mesure et de calcul intégrés dans les logiciels de mesure tridimensionnelle.		221

ANNEXE A

Programmation linéaire :
Algorithme Primal du Simplexe
(MIN.83)

Un problème de programmation linéaire consiste à minimiser (ou à maximiser) une fonction linéaire sous des contraintes linéaires ; il s'agit donc d'un programme mathématique de la forme :

$$\begin{array}{l} \text{Minimiser ou Maximiser } Z(x) \text{ sous les contraintes} \\ (P_0) \left\{ \begin{array}{l} g_i(x) = 0 \quad i \in I \quad (\text{Contraintes égalité}) \\ g_i(x) \leq 0 \quad i \in J \\ g_i(x) \geq 0 \quad i \in K \end{array} \right\} \quad (\text{Contraintes inégalité}) \\ \text{avec } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \geq 0 \end{array}$$

où les fonctions Z, g_i ($i \in H = I \cup J \cup K$) sont des fonctions linéaires des variables x_1, \dots, x_n .

Remarque :

Il n'est pas restrictif de supposer que les variables x_j ($j = 1, \dots, n$) sont astreintes à être non-négatives. En effet, s'il existe une variable x_j pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle, positive, négative ou nulle on pourra remplacer x_j par la différence $x_j^+ - x_j^-$ de deux variables x_j^+ et x_j^- astreintes, elles, à ne prendre que des valeurs non négatives.

Le problème qui en résulte est évidemment un programme linéaire de la forme (P_0) .

Forme standard d'un programme linéaire:

On peut toujours mettre un programme linéaire quelconque sous une forme standard ou toutes les contraintes sont des égalités, pour cela on introduit des variables supplémentaires appelées variables d'écart.

Pour cette raison, on ne considèrera que des programmes linéaires sous forme standard du type :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser: } Z = C.x \\ A.x = B \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ avec } x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T, \text{ vecteur des variables et variables d'écart avec:}$$

n = nombre de variables
 m = nombre de contraintes $k = m + n$
 A = matrice réelle $m * k$ (matrice des contraintes)
 $C = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ vecteur ligne des coûts
 $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ vecteur colonne des seconds membres

Bases réalisables

On appelle base toute sous-matrice carrée régulière ($n * n$) extraite de A (il en existe au moins une, puisque $\text{rang}(A) = m$).

Soit B^* une base. Alors en permutant les colonnes de A , on peut toujours mettre A sous la forme $A = [B^*, H]$ où H est la sous-matrice formée par les colonnes de A qui ne sont pas dans la base. De même pour, x en $[x_b, x_h]$ et C en $[C_b, C_h]$.

Toute solution de (P) vérifie : $A.x = B$ et par suite:

$$B^*.x_b + H.x_h = B \quad (1)$$

On appelle solution de base (associée à la base B^*), la solution particulière de (1) obtenue en faisant $x_h = 0$.

$$B^*.x_b = B \quad \text{soit} \quad x_b = B^{*-1}.B$$

Une solution de base est dite réalisable si $x_b \geq 0$, autrement dit si :

$$B^{*-1}.B \geq 0$$

Théorème 1

L'ensemble des points extrêmes $X = \{x \in \mathbb{R}^k / A.x = B, x \geq 0\}$ correspond à l'ensemble des solutions de bases réalisables.

Corollaire 1

L'ensemble des points extrêmes $X = \{x \in \mathbb{R}^k / A.x = B, x \geq 0\}$ a un nombre fini de points. Ce nombre est $< C_k^m$.

Théorème 2

L'optimum de Z , fonction linéaire, sur $X \subset \mathbb{R}^k$ est atteint en au moins un point extrême. S'il est atteint en plusieurs points extrêmes, il est atteint en tout point.

On déduit des théorèmes 1 et 2 précédents que, lorsque un programme linéaire admet un optimum à distance finie, alors il existe une base réalisable B^0 telle que la solution de base x^0 correspondante soit optimale.

Le problème est maintenant de définir une procédure algorithmique permettant de trouver une base optimale B^0 .

Théorème 3

Définissons le m vecteur ligne $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ par :

$$\pi = C_b . B^{*-1}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que B^* soit une base réalisable optimale est que :

$$\bar{c}_h = c_h - \pi . H = c_h - C_b . B^{*-1} . H \geq 0$$

Le vecteur \bar{c}_h est appelé le vecteur des multiplicateurs du simplexe. Les composantes \bar{c}_j du vecteur \bar{c}_h sont appelés coûts réduits des variables hors-base.

Corollaire 2

Soit B^* une base réalisable quelconque, x^0 la solution de base correspondante est $\bar{c}_h = c_h - \pi . H$ s'il existe une variable hors base x_s telle que $\bar{c}_s < 0$, alors :

- ou bien on peut augmenter indéfiniment la valeur de x_s sans sortir de l'ensemble des solutions réalisables, et dans ce cas l'optimum de Z est non borné ;
- ou bien on met en évidence une autre base \widehat{B} et une autre solution de base réalisable \widehat{x} telle que : $Z(\widehat{x}) < Z(x^0)$.

L'intérêt du corollaire 2 vient du fait qu'une des méthodes de résolution des programmes linéaires en découle directement : l'algorithme primal du Simplexe.

Algorithme de résolution détaillé

A partir de cette étude théorique, l'algorithme de résolution utilisé est le suivant :

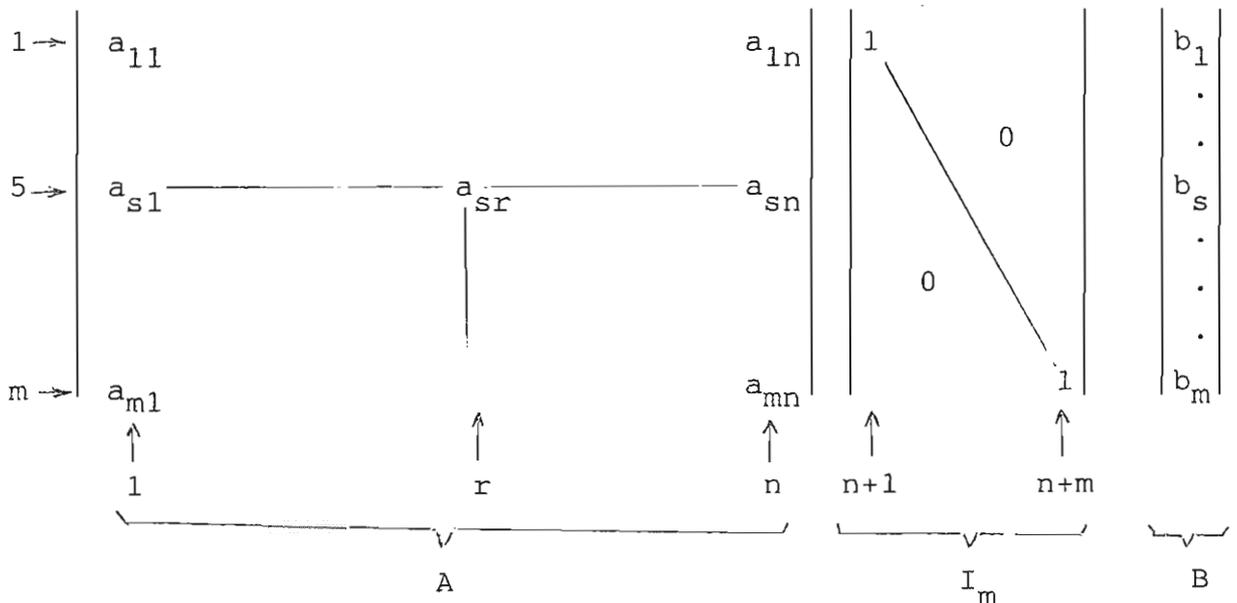
Problème 1

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} Z(x) = C \cdot x & \text{fonction objectif à maximiser} \\ A \cdot x \leq B & \text{les } m \text{ contraintes sous forme matricielle} \\ \text{avec } x \geq 0 & , \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ les } n \text{ variables} \end{cases}$$

. Sous forme canonique, on obtient la représentation suivante ; une fois ajouter les m variables d'écart (de coût réduit égal à 0) nécessaire pour transformer en égalité les m contraintes d'inégalité.

$$0 \rightarrow (-c_1 \dots -c_n \text{---Coeff.fonction objectif---} -c_n) \quad (0 \text{-----} 0) \quad (b_0)$$



Soit $k = n+m$ le nombre de variables à déterminer.

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(x) = C \cdot x \\ A = \left[\begin{array}{c|c} A & I_m \end{array} \right] \rightarrow A \cdot x = B \\ \text{avec } x \geq 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T \end{array} \right.$$

- . Dans notre cas où toutes les contraintes sont en \leq ; il n'est pas nécessaire d'introduire des variables artificielles pour démarrer l'algorithme (trouver une base réalisable initiale), si tous les b_i sont positifs.

Dans le cas où un b_i est négatif, il est nécessaire d'introduire une variable artificielle de coefficient -1 , avec un coût réduit pour la fonction objectif égal à $-M_j$ (où M_j est très grand). Soit D , la matrice regroupant les coefficients des variables artificielles.

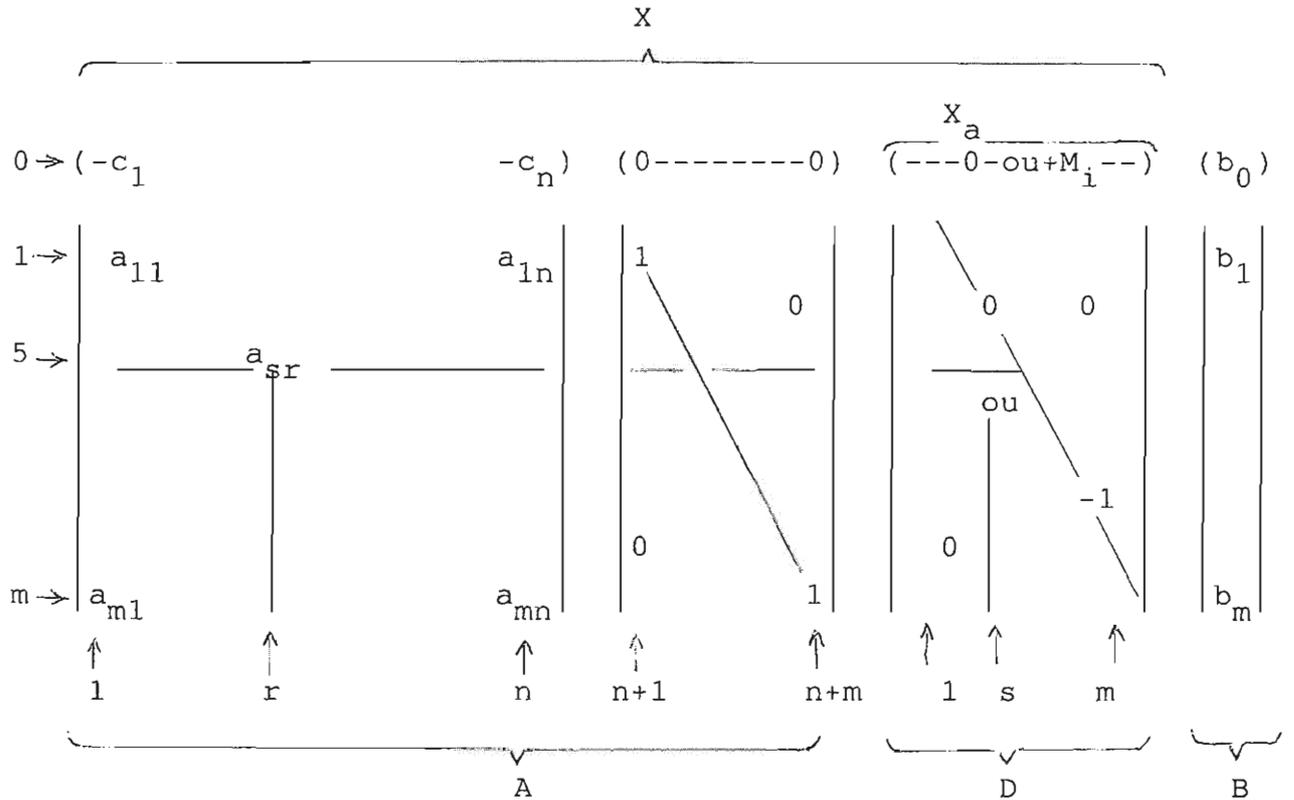
La base réalisable initiale est alors composée des j variables artificielles égales au coefficient $|b_j|$ correspondant et des $(m-j)$ variables d'écart restantes égales au coefficient b_i correspondant.

La fonction objectif initiale vaut alors : $b_0 = \sum M_j * |b_j|$
somme effectuée sur les j variables artificielles.

L'augmentation de la valeur b_0 de la fonction objectif ne peut se faire que par un changement de base réalisable.

Cependant, avec les changements de base successifs, il faut établir une correspondance entre le numéro d'ordre d'une variable dans la base et son indice.

- . L'algorithme de changement de base est alors le suivant :
Si on rassemble les matrices A et I_m en une seule matrice A , on a alors :



On sort de la base la variable $k + s^{\text{ème}}$ de X ou la variable $s^{\text{ème}}$ de x_a . On y fait rentrer la variable qui est en $r^{\text{ème}}$ position.

. On définit alors l'algorithme de changement de base de JORDAN avec pour pivot l'élément (s_r) .

Soit :

- $p = 1/a_{sr}$
- $\tilde{a}_{sj} = p * a_{sj}$ pour $j \in [1, m+n]$
- $\tilde{b}_s = p * b_s$, $\tilde{a}_{sr} = p$ et $\tilde{a}_{sn+r} = p$

et :

- pour $i = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, m$
- $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{ir} * \tilde{a}_{sj}$ pour $j = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, m+n$
- $\tilde{b}_i = b_i - a_{ir} * \tilde{b}_s$
- $\tilde{a}_{ir} = -p * a_{ir}$

La matrice D n'est pas rangée en mémoire ; la ligne 0 de la matrice A est composée des différents coûts réduits de la fonction objectif, multipliés par - 1.

. La matrice \tilde{A} est alors la nouvelle matrice A, après le changement de base.

A chaque changement de base, on doit modifier le contenu d'un vecteur index qui précise l'ordre des variables.

- $m+n=k$ premières variables du problème + variables d'écart
- m dernières variables : variables artificielles
- index (i) = i pour $i = 1, \dots, k+m$

Lors d'un changement de base de pivot (s_r), la variable $k+s$ sort de la base et la variable r y entre. On permute alors le contenu des mémoires index qui sont

$$\text{index}(r) \quad \text{et} \quad \text{index}(k+s)$$

Le problème réside donc dans le choix optimum de r et de s ; pour cela on utilise le critère de DANTZIG qui est :

$$r : -a_{or} = \text{Max} \left\{ -a_{oj} / a_{oj} \leq 0 \right\} \\ 1 \leq j \leq n+m$$

a_{oj} étant les différents coûts réduits des variables réelles et d'écart.

$$s : \frac{b_s}{a_{srm}} = \text{Min} \left\{ \frac{b_i}{a_{ir}} > 0 \right\} \\ 1 \leq i \leq m$$

Une fois ce choix réalisé, on exécute la procédure de changement de base.

. Dans ce choix intervient trois cas particuliers :

- $s_i a_{oj} > 0$; $\forall_j \leq n+m$ alors la solution réalisable de base finale de X est la solution optimale du problème posé. On ressort les variables réelles x_i à l'aide du vecteur index.

Pour $i = 1$ à n , on cherche $j \in [1, m]$ tel que $\text{index}(j)=i$
alors $x_i = b_j$

Si j n'existe pas alors $x_i = 0$.

La valeur de la fonction économique vaut dans ce cas b_o .

- $s_i a_{ir} \leq 0$; $\forall_i > 0$ et $a_{or} < 0$ alors la fonction objectif croît indéfiniment.

- $s_i b_s = 0$; alors la méthode ne converge pas (pas de solution).

Annexe B

Définition d'un cône nominal de direction connue.

Un cône de sommet $S(x_s, y_s, z_s)$ et d'axe parallèle à l'axe z a pour équation:

$$(1) \quad (x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 = k^2 (z-z_s)^2$$

avec $k^2 = \text{tg}^2 \Delta$

Δ : demi-angle au sommet

Par translation d'axe on prend comme origine du repère le premier point P_0 mesuré.

Le cône est défini par m points d'indice 0 à n avec $m=n-1$

Au point P_0 l'équation (1) devient:

$$(P_0) \quad x_s^2 + y_s^2 - k^2 z_s^2 = 0$$

Au point P_i on a:

$$x_i^2 + x_s^2 - 2x_i x_s + y_i^2 + y_s^2 - 2y_i y_s - k^2 z_i^2 - k^2 z_s^2 + 2k^2 z_i z_s = 0$$

Pour tout point P_i avec $i=1, \dots, n$ on obtient n équations de la forme:

$$(P_0 - P_i) \quad 2x_i x_s + 2y_i y_s - 2k^2 z_i z_s = x_i^2 + y_i^2 - k^2 z_i^2$$

On résoud le système de n équations à trois inconnues par la méthode de GAUSS:

$$W = \sum [(x_i^2 + y_i^2 - k^2 z_i^2) - (2x_i x_s + 2y_i y_s - 2k^2 z_i z_s)]^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial y_i} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial z_i} = 0$$

Soit:

$$\begin{vmatrix} 2\sum x_i^2 & 2\sum x_i y_i & -2k^2 \sum x_i z_i \\ 2\sum x_i y_i & 2\sum y_i^2 & -2k^2 \sum y_i z_i \\ -2\sum x_i z_i & -2\sum y_i z_i & 2k^2 \sum z_i^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_s \\ y_s \\ z_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum x_i^3 + \sum x_i y_i^2 - k^2 \sum x_i z_i^2 \\ \sum x_i^2 y_i + \sum y_i^3 - k^2 \sum z_i^2 y_i \\ -\sum x_i^2 z_i - \sum y_i^2 + k^2 \sum z_i^3 \end{vmatrix}$$

En posant :

$$\begin{array}{lll} X_1 = 2 x_i^2 & Y_1 = 2 x_i y_i & Z_1 = -2 x_i z_i \\ X_2 = 2 x_i y_i & Y_2 = 2 y_i^2 & Z_2 = -2 y_i z_i \\ X_3 = -2 x_i z_i & Y_3 = -2 y_i z_i & Z_3 = 2 z_i^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{et } a_1 = x_i^3 + x_i y_i^2 & b_1 = -x_i z_i^2 \\ a_2 = y_i x_i^2 + y_i^3 & b_2 = -y_i z_i^2 \\ a_3 = -z_i x_i^2 - z_i y_i^2 & b_3 = z_i^3 \end{array}$$

on obtient :

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & k^2 Z_1 \\ X_2 & Y_2 & k^2 Z_2 \\ X_3 & Y_3 & k^2 Z_3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 k^2 \\ a_2 + b_2 k^2 \\ a_3 + b_3 k^2 \end{vmatrix}$$

on pose :

$$M = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & k^2 Z_1 \\ X_2 & Y_2 & k^2 Z_2 \\ X_3 & Y_3 & k^2 Z_3 \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = k^2 M'$$

avec d = déterminant de la matrice M'

on obtient la solution :

$$x_o = \frac{k^2 \begin{vmatrix} a_1 + b_1 k^2 & Y_1 & Z_1 \\ a_2 + b_2 k^2 & Y_2 & Z_2 \\ a_3 + b_3 k^2 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}}{k^2 d}$$

$$y_o = \frac{k^2 \begin{vmatrix} X_1 & a_1 + b_1 k^2 & Z_1 \\ X_2 & a_2 + b_2 k^2 & Z_2 \\ X_3 & a_3 + b_3 k^2 & Z_3 \end{vmatrix}}{k^2 d}$$

$$z_0 = \frac{k^2 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & a_1 + b_1 k^2 \\ X_2 & Y_2 & a_2 + b_2 k^2 \\ X_3 & Y_3 & a_3 + b_3 k^2 \end{vmatrix}}{k^2 d}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} x_0 &= A_x \cdot k^2 + B_x \\ y_0 &= A_y \cdot k^2 + B_y \\ z_0 &= A_z + B_z / k^2 \end{aligned}$$

avec

$$A_x = \frac{b_1(Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2) - b_2(Y_1 Z_3 - Y_3 Z_1) + b_3(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)}{d}$$

$$B_x = \frac{a_1(Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2) - a_2(Y_1 Z_3 - Y_3 Z_1) + b_3(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)}{d}$$

$$A_y = \frac{-b_1(Z_3 X_2 - Z_2 X_3) + b_2(Z_3 X_1 - Z_1 X_3) - b_3(Z_2 X_1 - Z_1 X_2)}{d}$$

$$B_y = \frac{-a_1(Z_3 X_2 - Z_2 X_3) + a_2(Z_3 X_1 - Z_1 X_3) - a_3(Z_2 X_1 - Z_1 X_2)}{d}$$

$$A_z = \frac{b_1(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) + b_2(X_1 Y_3 - X_3 Y_1) + b_3(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)}{d}$$

$$B_z = \frac{a_1(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) + a_2(X_1 Y_3 - X_3 Y_1) + b_3(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)}{d}$$

L'équation (1) devient :

$$(2) \quad (A_x \cdot k^2 + B_x)^2 + (A_y \cdot k^2)^2 - k^2(A_z k^2 + B_z)^2 = 0$$

En posant $K=k^2$ on a :

$$(A_x^2 + A_y^2)k^2 + B_x^2 + B_y^2 + (A_x B_x + A_y B_y)2K - 1/K(A_z^2 K^2 + B_z^2 + 2A_z B_z K) = 0$$

Soit :

$$(3) \quad K^3 + \frac{2(A_x B_x + A_y B_y - A_z^2)}{(A_x^2 + A_y^2)} K^2 + \frac{B_x^2 + B_y^2 - 2A_z B_z}{(A_x^2 + A_y^2)} K - \frac{B_z^2}{(A_x^2 + A_y^2)} = 0$$

Que l'on peut écrire sous la forme d'une équation du troisième degré que l'on résoud :

$$K^3 + a K^2 + b K + c = 0$$

On obtient trois racines.

On retient la solution possible :

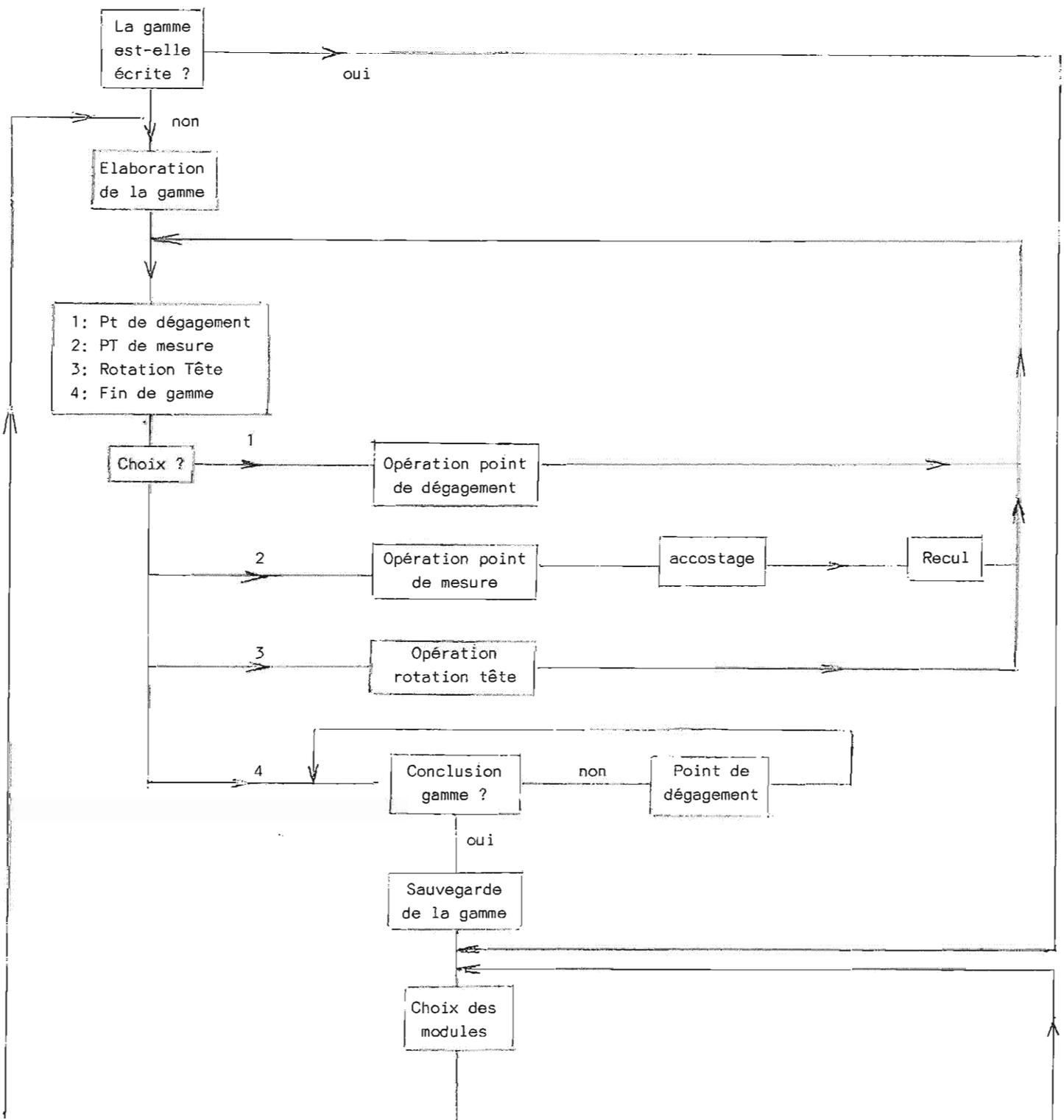
$$\left\{ \begin{array}{l} k = \sqrt{K} \quad (1/2 \text{ angle au sommet}) \\ \left. \begin{array}{l} x_s = A_x \cdot K + B_x \\ y_s = A_y \cdot K + B_y \\ z_s = A_z + B_z / K \end{array} \right\} \quad (\text{sommet du cône}) \end{array} \right.$$

Annexe C

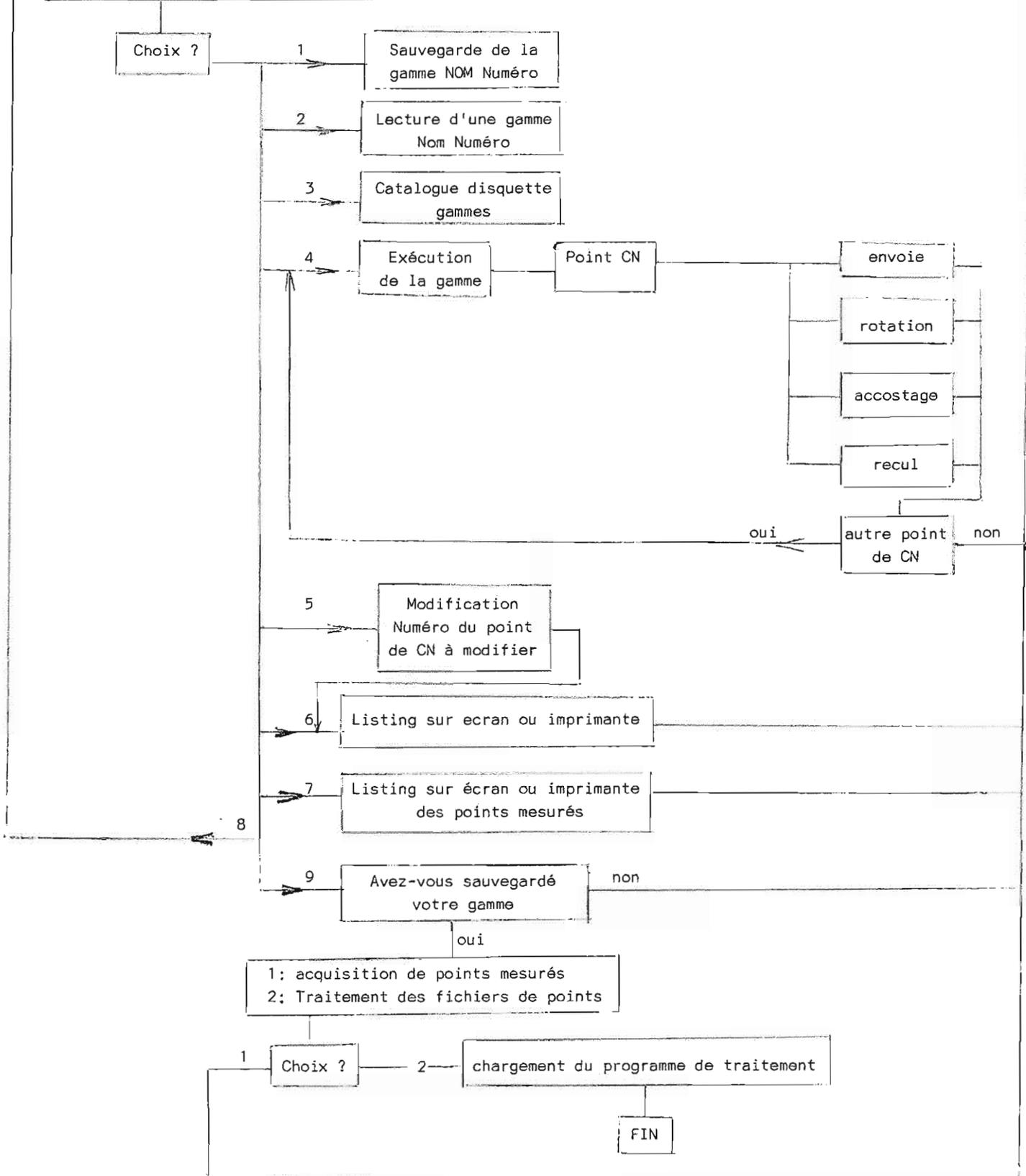
Logiciel d'acquisition de points de mesure [MIR.86]

Ce logiciel permet l'acquisition des coordonnées de points mesurés sur une machine à mesurer tridimensionnelle à commande numérique de la société SEIV RENAULT MESURE. Les points peuvent être mesurés aussi bien en mode manuel qu'en mode commande numérique.

Organigramme du programme :



- 1/ Sauvegarde
- 2: Lecture
- 3: Catalogue des gammes
- 4: Execution
- 5: Modification
- 6: Listing des points CN
- 7: Listing des points de mesure
- 8: Ecriture gamme
- 9: Fin



ANNEXE D

Résultats expérimentaux dans le cas d'un cercle
de diamètre 32 mm palpé en 27 points

I Optimisation du cercle suivant le critère de GAUSS :

point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart nominal	Ecart Optimisé GAUSS
1	156.980	158.527	-402.359	-0.00249	-0.00530
2	154.286	157.721	-402.359	-0.00115	-0.00297
3	149.425	154.691	-402.354	0.00312	0.00348
4	146.871	151.728	-402.354	0.00342	0.00526
5	145.268	148.662	-402.358	0.00475	0.00781
6	144.384	145.462	-402.358	0.00335	0.00744
7	144.168	142.417	-402.353	0.00198	0.00686
8	144.440	139.841	-402.353	0.00049	0.00591
9	145.077	137.467	-402.357	0.00000	0.00580
10	145.816	135.704	-402.353	0.00224	0.00825
11	148.808	131.510	-402.357	-0.00261	0.00351
12	151.688	129.204	-402.357	-0.00507	0.00075
13	155.679	127.404	-402.354	-0.00597	-0.00091
14	160.046	126.741	-402.358	0.00082	0.00474
15	162.645	126.928	-402.354	-0.00383	-0.00073
16	166.370	127.967	-402.359	-0.00391	-0.00218
17	171.108	130.989	-402.355	0.00080	0.00040
18	172.778	132.783	-402.354	0.00000	-0.00134
19	174.874	136.193	-402.350	0.00996	0.00718
20	176.008	139.763	-402.350	0.01226	0.00828
21	176.298	142.918	-402.350	0.01298	0.00816
22	175.933	146.211	-402.342	0.01346	0.00796
23	174.407	150.375	-402.338	0.01744	0.01139
24	172.051	153.690	-402.338	0.01535	0.00921
25	169.065	156.220	-402.332	0.00894	0.00308
26	165.275	158.054	-402.330	0.00723	0.00206
27	162.589	158.686	-402.333	-0.00000	-0.00453

Le défaut de Circularité vaut : 0.0167 mm

Le cercle associé a pour centre :

X= 160.230

Y= 142.805

Le diamètre du cercle associé moyen vaut: 32.126 mm

Le diamètre du cercle associé mini vaut: 32.109 mm

Le diamètre du cercle associé maxi vaut: 32.143 mm

2 Optimisation du cercle suivant le critère rayon maxi tangent interieur :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart Optimisé Rayon Maxi Int.
1	156.980	158.527	-402.359	-0.00530	0.00000
2	154.286	157.721	-402.359	-0.00297	0.00193
3	149.425	154.691	-402.354	0.00348	0.00742
4	146.871	151.728	-402.354	0.00526	0.00851
5	145.268	148.662	-402.358	0.00781	0.01046
6	144.384	145.462	-402.358	0.00744	0.00956
7	144.168	142.417	-402.353	0.00686	0.00854
8	144.440	139.841	-402.353	0.00591	0.00726
9	145.077	137.467	-402.357	0.00580	0.00690
10	145.816	135.704	-402.353	0.00825	0.00919
11	148.808	131.510	-402.357	0.00351	0.00422
12	151.688	129.204	-402.357	0.00075	0.00146
13	155.679	127.404	-402.354	-0.00091	0.00000
14	160.046	126.741	-402.358	0.00474	0.00604
15	162.645	126.928	-402.354	-0.00073	0.00089
16	166.370	127.967	-402.359	-0.00218	0.00000
17	171.108	130.989	-402.355	0.00040	0.00351
18	172.778	132.783	-402.354	-0.00134	0.00221
19	174.874	136.193	-402.350	0.00718	0.01143
20	176.008	139.763	-402.350	0.00828	0.01314
21	176.298	142.918	-402.350	0.00816	0.01348
22	175.933	146.211	-402.342	0.00796	0.01370
23	174.407	150.375	-402.338	0.01139	0.01752
24	172.051	153.690	-402.338	0.00921	0.01553
25	169.065	156.220	-402.332	0.00308	0.00941
26	165.275	158.054	-402.330	0.00206	0.00822
27	162.589	158.686	-402.333	-0.00453	0.00143

Le défaut de circularite vaut : 0.0175 mm

Le cercle associe a pour centre :

X= 160.228

Y= 142.803

Le diametre du cercle associe vaut: 32.113 mm

3 Optimisation du cercle suivant le critère rayon mini tangent
exterieur :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart optimisé Rayon Mini Ext.
1	156.980	158.527	-402.359	-0.00530	-0.01970
2	154.286	157.721	-402.359	-0.00297	-0.01723
3	149.425	154.691	-402.354	0.00348	-0.01009
4	146.871	151.728	-402.354	0.00526	-0.00756
5	145.258	148.662	-402.358	0.00781	-0.00419
6	144.384	145.462	-402.358	0.00744	-0.00367
7	144.168	142.417	-402.353	0.00686	-0.00338
8	144.440	139.841	-402.353	0.00591	-0.00358
9	145.077	137.467	-402.357	0.00580	-0.00298
10	145.816	135.704	-402.353	0.00825	0.00000
11	148.808	131.510	-402.357	0.00351	-0.00342
12	151.688	129.204	-402.357	0.00075	-0.00540
13	155.679	127.404	-402.354	-0.00091	-0.00639
14	160.046	126.741	-402.358	0.00474	-0.00040
15	162.645	126.928	-402.354	-0.00073	-0.00582
16	166.370	127.967	-402.359	-0.00218	-0.00742
17	171.108	130.989	-402.355	0.00040	-0.00554
18	172.778	132.783	-402.354	-0.00134	-0.00773
19	174.874	136.193	-402.350	0.00718	-0.00012
20	176.008	139.763	-402.350	0.00828	0.00000
21	176.298	142.918	-402.350	0.00816	-0.00102
22	175.933	146.211	-402.342	0.00796	-0.00218
23	174.407	150.375	-402.338	0.01139	0.00000
24	172.051	153.690	-402.338	0.00921	-0.00322
25	169.065	156.220	-402.332	0.00308	-0.01020
26	165.275	158.054	-402.330	0.00206	-0.01189
27	162.589	158.686	-402.333	-0.00453	-0.01876

Le défaut de circularité vaut : 0.0197 mm

Le cercle associé a pour centre :

X= 160.230

Y= 142.809

Le diamètre du cercle associé vaut: 32.140 mm

4 Optimisation du cercle suivant le critère défaut de forme mini :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart optimisé Déf. forme mini
1	156.980	158.527	-402.359	-0.00530	-0.01353
2	154.286	157.721	-402.359	-0.00297	-0.01090
3	149.425	154.691	-402.354	0.00348	-0.00403
4	146.871	151.728	-402.354	0.00526	-0.00212
5	145.268	148.662	-402.358	0.00781	0.00044
6	144.384	145.462	-402.358	0.00744	-0.00002
7	144.168	142.417	-402.353	0.00686	-0.00077
8	144.440	139.841	-402.353	0.00591	-0.00192
9	145.077	137.467	-402.357	0.00580	-0.00225
10	145.816	135.704	-402.353	0.00825	-0.00001
11	148.808	131.510	-402.357	0.00351	-0.00539
12	151.688	129.204	-402.357	0.00075	-0.00867
13	155.679	127.404	-402.354	-0.00091	-0.01094
14	160.046	126.741	-402.358	0.00474	-0.00589
15	162.645	126.928	-402.354	-0.00073	-0.01168
16	166.370	127.967	-402.359	-0.00218	-0.01353
17	171.108	130.989	-402.355	0.00040	-0.01137
18	172.778	132.783	-402.354	-0.00134	-0.01320
19	174.874	136.193	-402.350	0.00718	-0.00473
20	176.008	139.763	-402.350	0.00828	-0.00355
21	176.298	142.918	-402.350	0.00816	-0.00350
22	175.933	146.211	-402.342	0.00796	-0.00345
23	174.407	150.375	-402.338	0.01139	0.00044
24	172.051	153.690	-402.338	0.00921	-0.00123
25	169.065	156.220	-402.332	0.00308	-0.00683
26	165.275	158.054	-402.330	0.00206	-0.00725
27	162.589	158.686	-402.333	-0.00453	-0.01345

Le défaut de circularité vaut : 0.0140 mm

Le cercle associé a pour centre :

X= 160.232

Y= 142.804

Le diamètre du cercle associé moyen vaut: 32.126 mm

Le diamètre du cercle associé minimum vaut: 32.112 mm

Le diamètre du cercle associé maximum vaut: 32.140 mm

ANNEXE E

Résultats expérimentaux dans le cas d'un cylindre
de diamètre 199.5 mm palpé en 12 points

1 Optimisation du cylindre suivant le critère de GAUSS :

point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart nominal	Ecart Optimisé GAUSS
1	290.318	210.334	-411.484	0.00000	-0.00347
2	194.641	117.172	-411.481	0.00000	-0.01574
3	91.222	211.086	-411.482	0.00422	0.00578
4	191.009	316.567	-411.482	0.00000	0.01565
5	290.546	210.635	-395.125	0.20838	0.12506
6	194.237	117.253	-395.127	-0.09573	-0.08059
7	91.225	210.835	-395.129	0.01600	0.10152
8	190.853	316.453	-395.123	-0.11421	-0.13234
9	290.456	210.475	-380.236	0.12863	-0.02731
10	194.436	117.196	-380.239	-0.03168	0.01124
11	91.436	210.567	-380.237	-0.17811	-0.01599
12	190.965	316.659	-380.234	0.09192	0.04286

Le défaut de Cylindricite vaut : 0.2574 mm

L'axe du Cylindre passe par le point :

X= 190.798

Y= 216.817

Z= -411.482

Le diamètre du cylindre associé moyen vaut: 199.462 mm

Le diamètre du cylindre associé mini vaut: 199.205 mm

Le diamètre du cylindre associé maxi vaut: 199.720 mm

L'orientation du Cylindre est :

-suivant X: -0.002062 rd

-suivant Y: 0.005021 rd

2 Optimisation du cylindre suivant le critère rayon maxi tangent interieur :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart Optimisé Rayon Maxi Int.
1	290.318	210.334	-411.484	-0.00347	0.22069
2	194.641	117.172	-411.481	-0.01574	0.16637
3	91.222	211.086	-411.482	0.00578	0.00000
4	191.009	316.567	-411.482	0.01565	0.04763
5	290.546	210.635	-395.125	0.12506	0.32527
6	194.237	117.253	-395.127	-0.08059	0.00000
7	91.225	210.835	-395.129	0.10152	0.10740
8	190.853	316.453	-395.123	-0.13234	0.00000
9	290.456	210.475	-380.236	-0.02731	0.15110
10	194.436	117.196	-380.239	0.01124	0.00000
11	91.436	210.567	-380.237	-0.01599	0.00000
12	190.965	316.659	-380.234	0.04286	0.26680

Le défaut de cylindricite vaut : 0.3253 mm

L'axe du Cylindre passe par le point :

X= 190.683

Y= 216.890

Z= -411.482

Le diametre du cylindre associe vaut: 199.260 mm

L'orientation du Cylindre est :

-suivant X: 0.004084 rd

-suivant Y: 0.006094 rd

3 Optimisation du cylindre suivant le critère rayon mini tangent exterieur :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart optimisé Rayon Mini Ext.
1	290.318	210.334	-411.484	-0.00347	-0.00125
2	194.641	117.172	-411.481	-0.01574	-0.21221
3	91.222	211.086	-411.482	0.00578	-0.22479
4	191.009	316.567	-411.482	0.01565	0.00000
5	290.546	210.635	-395.125	0.12506	0.00000
6	194.237	117.253	-395.127	-0.08059	-0.26800
7	91.225	210.835	-395.129	0.10152	0.00000
8	190.853	316.453	-395.123	-0.13234	-0.16225
9	290.456	210.475	-380.236	-0.02731	-0.26858
10	194.436	117.196	-380.239	0.01124	-0.16773
11	91.436	210.567	-380.237	-0.01599	0.00000
12	190.965	316.659	-380.234	0.04286	0.00000

Le défaut de cylindricite vaut : 0.2686 mm

L'axe du Cylindre passe par le point :

X= 190.681

Y= 216.724

Z= -411.482

Le diametre du cylindre associe vaut: 199.686 mm

L'orientation du Cylindre est :

-suivant X: -0.002918 rd

-suivant Y: 0.012889 rd

4 Optimisation du cylindre suivant le critère défaut de forme mini :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart optimisé Déf. forme mini
1	290.318	210.334	-411.484	-0.00347	-0.02390
2	194.641	117.172	-411.481	-0.01574	-0.07120
3	91.222	211.086	-411.482	0.00578	-0.13022
4	191.009	316.567	-411.482	0.01565	-0.08565
5	290.546	210.635	-395.125	0.12506	0.03216
6	194.237	117.253	-395.127	-0.08059	-0.18621
7	91.225	210.835	-395.129	0.10152	0.03215
8	190.853	316.453	-395.123	-0.13234	-0.18621
9	290.456	210.475	-380.236	-0.02731	-0.18621
10	194.436	117.196	-380.239	0.01124	-0.13996
11	91.436	210.567	-380.237	-0.01599	-0.02492
12	190.965	316.659	-380.234	0.04286	0.03216

Le défaut de cylindricité vaut : 0.2184 mm

L'axe du cylindre passe par le point :

X= 190.740

Y= 216.839

Z= -411.482

Le diamètre du cylindre associé vaut: 199.474 mm

L'orientation du cylindre est :

- suivant X: 0.000845 rd

- suivant Y: 0.009276 rd

ANNEXE F

Résultats expérimentaux relatifs à l'étude statistique
des points aberrants

1 Cercle de l'annexe D avec modification significative du
point N° 25

1.1 Optimisation suivant le critère de GAUSS :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart nominal	Ecart optimisé par GAUSS
1	156.980	158.527	-402.359	-0.00249	0.00716
2	154.286	157.721	-402.359	-0.00115	0.00739
3	149.425	154.691	-402.354	0.00312	0.00860
4	146.871	151.728	-402.354	0.00342	0.00640
5	145.268	148.662	-402.358	0.00476	0.00536
6	144.384	145.462	-402.358	0.00335	0.00166
7	144.158	142.417	-402.353	0.00198	-0.00177
8	144.440	139.841	-402.353	0.00049	-0.00490
9	145.077	137.467	-402.357	0.00000	-0.00681
10	145.816	135.704	-402.353	0.00224	-0.00557
11	148.808	131.510	-402.357	-0.00261	-0.01254
12	151.688	129.204	-402.357	-0.00507	-0.01589
13	155.679	127.404	-402.354	-0.00597	-0.01711
14	160.046	126.741	-402.358	0.00082	-0.00980
15	162.645	126.928	-402.354	-0.00383	-0.01376
16	166.370	127.967	-402.359	-0.00391	-0.01235
17	171.108	130.989	-402.355	0.00080	-0.00461
18	172.778	132.783	-402.354	0.00000	-0.00387
19	174.874	136.193	-402.350	0.00996	0.00880
20	176.008	139.763	-402.350	0.01226	0.01369
21	176.298	142.918	-402.350	0.01298	0.01655
22	175.933	146.211	-402.342	0.01346	0.01913
23	174.407	150.375	-402.338	0.01744	0.02551
24	172.051	153.690	-402.338	0.01535	0.02509
25	169.000	156.000	-402.332	-0.21040	-0.19965
26	165.275	158.054	-402.330	0.00723	0.01837
27	162.589	158.686	-402.333	-0.00000	0.01098

Le défaut de Circularité vaut : 0.2252 mm

Le cercle associé a pour centre :

X= 160.222

Y= 142.790

Le diamètre du cercle associé moyen vaut: 31.946 mm

Le diamètre du cercle associé mini vaut: 31.721 mm

Le diamètre du cercle associé maxi vaut: 32.171 mm

1.2 Optimisation suivant le critère défaut de forme mini :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart Optimisé
1	156.980	158.527	-402.359	0.00716	0.14021
2	154.286	157.721	-402.359	0.00739	0.12978
3	149.425	154.691	-402.354	0.00860	0.10355
4	146.871	151.728	-402.354	0.00640	0.07977
5	145.268	149.662	-402.358	0.00536	0.05889
6	144.394	145.462	-402.358	0.00166	0.03634
7	144.168	142.417	-402.353	-0.00177	0.01647
8	144.440	139.841	-402.353	-0.00490	0.00051
9	145.077	137.467	-402.357	-0.00681	-0.01230
10	145.816	135.704	-402.353	-0.00557	-0.01851
11	148.808	131.510	-402.357	-0.01254	-0.04031
12	151.688	129.204	-402.357	-0.01589	-0.04827
13	155.679	127.404	-402.354	-0.01711	-0.05000
14	160.046	126.741	-402.358	-0.00980	-0.03572
15	162.645	126.928	-402.354	-0.01376	-0.03253
16	166.370	127.967	-402.359	-0.01235	-0.01680
17	171.108	130.989	-402.355	-0.00461	0.01805
18	172.778	132.783	-402.354	-0.00387	0.03215
19	174.874	136.193	-402.350	0.00880	0.06765
20	176.008	139.763	-402.350	0.01369	0.09390
21	176.298	142.918	-402.350	0.01655	0.11394
22	175.933	146.211	-402.342	0.01913	0.13295
23	174.407	150.375	-402.338	0.02551	0.15735
24	172.051	153.690	-402.338	0.02509	0.16866
25	169.000	156.000	-402.332	-0.19965	-0.05000
26	165.275	158.054	-402.330	0.01837	0.16866
27	162.589	158.686	-402.333	0.01098	0.15821

Le défaut de circularité vaut : 0.2187 mm

Le cercle associé a pour centre :

X= 160.184

Y= 142.706

Le diamètre du cercle associé moyen vaut: 32.122 mm

Le diamètre du cercle associé minimum vaut: 31.903 mm

Le diamètre du cercle associé maximum vaut: 32.340 mm

2 Cas d'une surface plane :

2.1 Surface plane sans point aberrant optimisée suivant le critère de GAUSS :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart nominal	Ecart optimisé par GAUSS
1	215.061	375.352	-396.173	0.00000	-0.00935
2	215.061	356.234	-396.222	-0.04900	-0.00568
3	215.062	337.773	-396.269	-0.09600	-0.00182
4	215.063	320.046	-396.315	-0.14200	0.00102
5	215.063	302.763	-396.356	-0.18300	0.00764
6	196.554	302.764	-396.355	-0.18200	0.00488
7	196.555	319.844	-396.319	-0.14600	-0.00618
8	196.554	337.279	-396.273	-0.10000	-0.00821
9	196.554	356.175	-396.212	-0.03900	0.00073
10	196.554	374.774	-396.157	0.01600	0.00449
11	176.649	374.775	-396.153	0.02000	0.00445
12	176.651	356.003	-396.209	-0.03600	0.00016
13	176.651	337.891	-396.262	-0.08900	-0.00294
14	176.651	319.769	-396.311	-0.13800	-0.00201
15	176.651	302.449	-396.352	-0.17900	0.00471
16	157.644	302.450	-396.352	-0.17900	0.00085
17	157.645	319.327	-396.308	-0.13500	-0.00165
18	157.645	338.265	-396.250	-0.07700	0.00418
19	157.645	355.928	-396.198	-0.02500	0.00751
20	157.645	373.958	-396.147	0.02600	0.00884
21	140.116	373.958	-396.140	0.03300	0.01228
22	140.117	355.831	-396.201	-0.02800	0.00123
23	140.117	338.131	-396.253	-0.08000	-0.00201
24	140.117	319.368	-396.305	-0.13200	-0.00231
25	140.117	302.733	-396.350	-0.17700	-0.00148
26	122.061	302.734	-396.342	-0.16900	0.00265
27	122.061	319.226	-396.302	-0.12900	-0.00259
28	122.062	337.733	-396.253	-0.08000	-0.00458
29	122.062	355.052	-396.209	-0.03600	-0.00829
30	122.062	373.728	-396.156	0.01700	-0.00675

Le défaut de Planéité vaut : 0.0216 mm

L'orientation du plan est :

- suivant X 0.002755 radians
- suivant Y 0.000203 radians

2.2 Surface plane sans point aberrant optimisée suivant le critère défaut de forme mini :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart optimisé Déf. forme mini
1	215.061	375.352	-396.173	0.00000	0.01007
2	215.061	356.234	-396.222	-0.04900	0.00557
3	215.062	337.773	-396.269	-0.09600	0.00091
4	215.063	320.046	-396.315	-0.14200	-0.00270
5	215.063	302.763	-396.356	-0.18300	-0.01007
6	196.554	302.764	-396.355	-0.18200	-0.00692
7	196.555	319.844	-396.319	-0.14600	0.00487
8	196.554	337.279	-396.273	-0.10000	0.00766
9	196.554	356.175	-396.212	-0.03900	-0.00245
10	196.554	374.774	-396.157	0.01600	-0.00341
11	176.649	374.775	-396.153	0.02000	-0.00295
12	176.651	356.003	-396.209	-0.03600	0.00051
13	176.651	337.891	-396.262	-0.08900	0.00283
14	176.651	319.769	-396.311	-0.13800	0.00112
15	176.651	302.449	-396.352	-0.17900	-0.00635
16	157.644	302.450	-396.352	-0.17900	-0.00210
17	157.645	319.327	-396.308	-0.13500	0.00113
18	157.645	338.265	-396.250	-0.07700	-0.00387
19	157.645	355.928	-396.198	-0.02500	-0.00644
20	157.645	373.958	-396.147	0.02600	-0.00699
21	140.116	373.958	-396.140	0.03300	-0.01007
22	140.117	355.831	-396.201	-0.02800	0.00021
23	140.117	338.131	-396.253	-0.08000	0.00268
24	140.117	319.368	-396.305	-0.13200	0.00217
25	140.117	302.733	-396.350	-0.17700	0.00062
26	122.061	302.734	-396.342	-0.16900	-0.00334
27	122.061	319.226	-396.302	-0.12900	0.00281
28	122.062	337.733	-396.253	-0.08000	0.00560
29	122.062	355.052	-396.209	-0.03600	0.01007
30	122.062	373.728	-396.156	0.01700	0.00933

Le défaut de Planéité vaut : 0.0201 mm

L'orientation du plan est :

- suivant X 0.002798 radians
- suivant Y 0.000224 radians

2.3 Surface plane avec modification significative du point N°1 optimisée suivant le critère de GAUSS :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart nominal	Ecart optimisé par GAUSS
1	215.061	375.352	-396.000	0.00000	0.13315
2	215.061	356.234	-396.222	-0.22200	-0.02988
3	215.062	337.773	-396.269	-0.26900	-0.01993
4	215.063	320.046	-396.315	-0.31500	-0.01125
5	215.063	302.763	-396.356	-0.35600	0.00106
6	196.554	302.764	-396.355	-0.35500	0.00320
7	196.555	319.844	-396.319	-0.31900	-0.01349
8	196.554	337.279	-396.273	-0.27300	-0.02127
9	196.554	356.175	-396.212	-0.21200	-0.01855
10	196.554	374.774	-396.157	-0.15700	-0.02092
11	176.649	374.775	-396.153	-0.15300	-0.01570
12	176.651	356.003	-396.209	-0.20900	-0.01379
13	176.651	337.891	-396.262	-0.26200	-0.01093
14	176.651	319.769	-396.311	-0.31100	-0.00403
15	176.651	302.449	-396.352	-0.35200	0.00840
16	157.644	302.450	-396.352	-0.35200	0.00957
17	157.645	319.327	-396.308	-0.30800	0.00151
18	157.645	338.265	-396.250	-0.25000	0.00109
19	157.645	355.928	-396.198	-0.19800	-0.00139
20	157.645	373.958	-396.147	-0.14700	-0.00600
21	140.116	373.958	-396.140	-0.14000	0.00208
22	140.117	355.831	-396.201	-0.20100	-0.00301
23	140.117	338.131	-396.253	-0.25300	-0.00041
24	140.117	319.368	-396.305	-0.30500	0.00547
25	140.117	302.733	-396.350	-0.35000	0.01178
26	122.061	302.734	-396.342	-0.34200	0.02089
27	122.061	319.226	-396.302	-0.30200	0.01002
28	122.062	337.733	-396.253	-0.25300	0.00193
29	122.062	355.052	-396.209	-0.20900	-0.00749
30	122.062	373.728	-396.156	-0.15600	-0.01210

Le défaut de Planeite vaut : 0.1630 mm

L'orientation du plan est :

- suivant X 0.003085 radians
- suivant Y -0.000062 radians

2.4 Surface plane avec modification significative du point N°1 optimisée suivant le critère défaut de forme mini :

Point N	Abscisse	Ordonnée	Cote	Ecart opt. GAUSS	Ecart optimisé Déf. forme mini
1	215.061	375.352	-396.000	0.13315	-0.07245
2	215.061	356.234	-396.222	-0.02988	0.07245
3	215.062	337.773	-396.269	-0.01993	0.04499
4	215.063	320.046	-396.315	-0.01125	0.01950
5	215.063	302.763	-396.356	0.00106	-0.02921
6	196.554	302.764	-396.355	0.00320	-0.01998
7	196.555	319.844	-396.319	-0.01349	0.01291
8	196.554	337.279	-396.273	-0.02127	0.03722
9	196.554	356.175	-396.212	-0.01855	0.05243
10	196.554	374.774	-396.157	-0.02092	0.07245
11	176.649	374.775	-396.153	-0.01570	0.05794
12	176.651	356.003	-396.209	-0.01379	0.03823
13	176.651	337.891	-396.262	-0.01093	0.01818
14	176.651	319.769	-396.311	-0.00403	-0.00591
15	176.651	302.449	-396.352	0.00840	-0.03476
16	157.644	302.450	-396.352	0.00957	-0.04480
17	157.645	319.327	-396.308	0.00151	-0.02073
18	157.645	338.265	-396.250	0.00109	-0.00235
19	157.645	355.928	-396.198	-0.00139	0.01689
20	157.645	373.958	-396.147	-0.00600	0.03861
21	140.116	373.958	-396.140	0.00208	0.02235
22	140.117	355.831	-396.201	-0.00301	0.01024
23	140.117	338.131	-396.253	-0.00041	-0.00915
24	140.117	319.368	-396.305	0.00547	-0.03282
25	140.117	302.733	-396.350	0.01178	-0.05491
26	122.061	302.734	-396.342	0.02089	-0.07245
27	122.061	319.226	-396.302	0.01002	-0.04593
28	122.062	337.733	-396.252	0.00193	-0.02029
29	122.062	355.052	-396.209	-0.00749	0.00556
30	122.062	373.728	-396.156	-0.01210	0.02788

Le défaut de Planéité vaut : 0.1449 mm

L'orientation du plan est :
- suivant X 0.004033 radians
- suivant Y -0.000528 radians

ANNEXE G

Liste des modules de mesure et de calcul intégrés
dans les logiciels de mesure tridimensionnelle

ELEMENTS GEOMETRIQUES MESURES

Elément Géométrique	Paramètres caractérisant les éléments géométriques associés aux surfaces mesurées par points
Point	1 point (centre de la sphère du palpeur)
Droite	2 points (extrêmes des points palpés)
Cercle	1 point (centre) ; \vec{n} (normal au plan) ; rayon de Gauss ou tangent côté libre de la matière ; défaut de forme
Plan	1 point (centre du plan) ; \vec{n} (normale au plan); défaut de forme
Sphère	1 point (centre) ; rayon Gauss ou tangent du côté libre de la matière ; défaut de forme
Cylindre	2 points extrêmes de l'axe ; rayon Gauss ou tangent du côté libre de la matière ; défaut de forme
Cône	2 points extrêmes de l'axe ; 1 point (sommet); 1/2 angle au sommet (du cône de Gauss ou tangent du côté libre de la matière) ; défaut de forme
$E\{P_i; \dots; P_n\}$	Ensemble E de points P_i mesurés appartenant aux surfaces.

ELEMENTS GEOMETRIQUES CONSTRUITS

Construction de points

Point : en coordonnées - cartésienne
- polaire

Intersection droite plan
(cylindre plan)
(cône plan)

Point de symétrie entre 2 points

Point projeté sur une droite
projeté sur un plan

(Intersection de deux droites)

Construction de droites

Droite définie par deux points
Intersection de deux plans
Droite projetée dans un plan
Droite passant par un point et perpendiculaire à un plan
Droite tangente à deux cercles (dans un plan)
(Droite symétrique de deux droites)

Construction de plans

Plan passant par un point et une droite
Plan parallèle à un plan et passant par un point
Plan parallèle à un plan à une distance donnée
Plan perpendiculaire à un plan et passant par une droite
Plan perpendiculaire à une droite et passant par un point
(Plan symétrique de deux plans)

Construction des éléments géométriques

Droite, Plan, Cercle, Sphère, Cylindre, Cône, passant par n points.

Positions relatives

* Distance entre :

point - point
point - droite
point - plan

* Ensemble D des distances entre l'ensemble E des points P_i mesurés d'une surface et une surface géométrique idéale associée : point, droite, plan, cercle, sphère, cylindre, cône.

* Angle entre :

2 droites
1 droite et un plan
2 plans

Fonctions particulières

- sup-inf {Ensemble D des distances}
- sup {Ensemble D des distances}
- inf {Ensemble D des distances}

Repère de projection (cotation)

Le repère est défini soit :

par 1 axe
ou 2 axes perpendiculaires ou non perpendiculaires
ou 3 axes (le 3ème axe étant perpendiculaire aux 2 premiers)
avec ou sans origine

Chaque axe (1er et 2ème) peut être parallèle à une droite (axe de cylindre et de cône) ou perpendiculaire à un plan.

NOM DE L'ETUDIANT : BOURDET Pierre

NATURE DE LA THESE : Doctorat d'Etat es sciences

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 23 JUIN 1987 n° 1010

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

